PROF. DR. HERMANN VON BARAVALLE

# O ENSINO DA ARITMÉTICA
# E
# O PLANO DE ENSINO "WALDORF"

FACULDADE RUDOLF STEINER
BIBLIOTECA
APRS - SÃO PAULO

Tradução de Dr. Rudolf Lanz



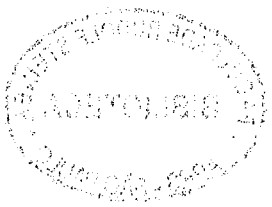
511
B181e
19-?
ex.1

FRS
Cód. acervo: 1381
Cód. exemplar: 1933515

511
B181o
AC 1381
T. 1933515

PROF. DR. HERMANN VON BARAVALLE

# O ENSINO DA ARITMÉTICA
# E
# O PLANO DE ENSINO "WALDORF"



Colaboração de Vanessa Valéria B. Mendes e Walkíria P. Cavalcanti – Fevereiro/2012

**Recebemos com grande interesse e alegria toda a qualquer contribuição que os leitores trouxerem com vistas ao aprimoramento desta versão, pois não foi efetuada revisão do português.**

## PREFÁCIO

O conteúdo deste livro deve constituir material prático para o ensino de aritmética de acordo com o método aplicado nas escolas Waldorf. Destina-se principalmente ao professor, o qual, como educador autônomo, organiza livre e individualmente o ensino dentro da sua classe. Isso não significa que o material deste livre só possa ser usado em escolas Waldorf. Os métodos didáticos das escolas Waldorf baseiam-se em aspectos gerais da evolução da criança e podem, portanto, ter seu lugar em qualquer escola e dentro de qualquer currículo. Queremos contribuir para uma fecundação mútua da prática do ensino dentro do sistema escolar em geral, segundo o conceito de "escolas particulares obedecendo a um método pedagógico especial".

Dentro dos limites impostos, não podemos cogitar em tratar a matéria de maneira exaustiva. Se deixarmos de incluir certos capítulos, isso não significa que estes não estejam incluídos no currículo das escolas Waldorf. Os pontos tratados são apenas fases características que devem ser completadas por meio de muitas outras matérias, com o uso da riquíssima literatura que existe dentro e fora do movimento Waldorf. O exposto é uma edição alemã ampliada do opúsculo "Teaching of Arithmetic and the Waldorf School Plan" publicado em 1950 pelo Adelphis College em Garden City (New York). Uma condensação dos princípios metódicos para o ensino da aritmética encontra-se também no livro do autor publicado na Suíça "Methodische Gesichtspunkte für den Aufbau des Rechenunterrichtes in der Volksschule" (Trosxler-Verlag, Bern 1952).

Hermann Von Baravalle

## INTRODUÇÃO

Existe em principio três componentes que têm características durante as ultimas décadas a evolução do método do ensino da aritmética, componentes que podem ser observados nos vários países, seja simultânea, se sucessivamente. O primeiro componente está relacionado com os princípios de uma "escola para aprender", sua orientação pode ser assim resumida: É uma necessidade e exigência imprescindível que a aritmética seja aprendida na escola de maneira segura e aprofundada. É esse o alvo do ensino de aritmética. Que o aluno o aceite ou não, ele deve receber a quantidade suficiente de instruções e treino; mais tarde, ele ficará grato pelo ensino recebido.

Para o segundo componente, invocada principalmente nos Estados Unidos, mas em escala crescente, também na Europa, a ênfase pode ser descrita com as seguintes palavras:

O ensino da aritmética exige cuidado especial no manuseio metódico. Mas do que em outras matérias, verifica-se na aritmética o fracasso de muitos alunos. Esse fracasso repercute até na autoconfiança, com consequências verificadas inclusive depois do tempo escolar. Investigações aprofundadas revelam que parte considerável da matéria exigida nos currículos de vários tipos de escolas, só é aplicada em escala reduzida na vida posterior do aluno. Deve-se evitar adestramento e o acento principal do ensino deve estar nos problemas práticos. A meta de todas as reformas do ensino deve ser um ensino "próximo da vida real", com o abandono correspondente de todo lastro supérfluo.

O terceiro componente, o ultimo cronologicamente, apóia-se em observações que conduziram a um ponto de vista ainda diferente. Encontramo-la, por exemplo, num relatório feito na Universidade de Columbia (New York): Um inspetor, conta ter visitado, em suas inspeções periódicas, uma classe em que se resolviam problemas práticos. Vários exemplos foram dados, os alunos tinham que indicar qual das quatro operações fundamentais devia ser aplicada. O inspetor notou um menino que se manifestou mal foi pronunciada a ultima palavra do problema. E quando foi chamado, sempre deu a resposta certa. No intervalo, o inspetor puxou prosa com o menino e, depois de estabelecer o contato, lhe disse: "Fiquei contente em ver a rapidez com que você se manifestou e a correção das suas respostas." Aí o menino sorriu ironicamente. "Penso, disse o inspetor, que você imaginou algo todo especial". Outro sorriso irônico, não isento de certa desconfiança. No decorrer da conversa, também essa desconfiança

foi desfeita, e o menino recebeu a garantia de que e não se devia preocupar. Então ele se abriu: "Sim, imaginei o seguinte: Quando o problema continha muitos números pequenos, era para somar. Quando havia dois números compridos, o menor seria subtraído do maior. Quando eram dois não muito compridos, é a "conta de vezes" e quando há um grande e um pequeno, o maior deve ser dividido pelo menor." O inspetor passou então a analisar o livro de aritmética e examinou todos os problemas de acordo com o critério do menino. Resultado: 85% dos problemas tinham sido resolvido corretamente, com a nota "Bom". O menino que nem procurou entender o texto dos problemas, tinha conseguido pela aplicação da sua regra fazer exatamente o contrário do que as autoridades escolares pretendiam quando substituíram os exercícios puros pelos problemas "práticos".

Esse exemplo confirma a experiência feita em muitos países, segundo os tais problemas "práticos" são para os alunos muito mais difíceis que simples exercícios. Essas constatações são confirmadas pelo foto de que a concentração dos alunos, em escolas primárias, não é aumentada pelos problemas onde um "texto" está combinado com o exercício numérico, mas sim, diminuída. O interesse das crianças se concentra mais nos "objetos " com os quais se calcula, do que nos próprios cálculos.

O exemplo seguinte, completa tais constatações: Uma criança volta da escola para casa: "Não gosto de aritmética. Ela não serve para nada. Não quero mais fazer contas." O pai, preocupado com essa atitude, se esforça para convencer a criança: "Veja, não se pode dizer que a aritmética não sirva para nada. Ao contrário, é muito importante. Eu, na minha profissão devo fazer muitos cálculos. Agente deve saber fazer cálculos para comprar, quando se tem dinheiro no banco, etc." A criança escuta tranquilamente, mas quando o pai acaba ela diz a meia voz: "É mesmo assim, a aritmética não serve para nada." O que aconteceu? A criança assistiu a uma aula de aritmética: o que aí vivenciou, oprime, ou, pelo menos destrói algo. Ora, nessa idade a criança tem, naturalmente, a idéia de que aquilo que tem sobre ela, subjetivamente um efeito destruidor, o tem também objetivamente. Essa opinião corresponde aquela filosofia grega pré-socrática. A aritmética que não "é boa para criança", não serve, de modo geral. Na idade da escola primária, a criança está longe de qualquer ponto de vista utilitário. Nessa idade, crianças atuam pelos méritos da própria coisa, e não pela utilidade que poderá ter mais tarde.

A experiência mais importante que a criança tem no campo da aritmética, manifesta-se por meio de exclamações como as seguintes: "Já sei contar até 30!" "Já sei somar bem depressa!" "Já sei dizer a tabuada do 6 sem errar!" " Eu fiz essa divisão sozinho, e não

fica resto!" A criança realça o próprio progresso, a descoberta das suas capacidades e a percepção do que ela sabe realizar com suas próprias forças. A criança só fica convencida do valor da aritmética quando sente o quanto a revigora e vivifica.

O terceiro componente na metódica do ensino da aritmética correspondente ao progresso da escola "de aprender a trabalhar" para a escola que visa formar e depois, a verdadeira escola " do mundo". Sua contribuição pode ser resumida como segue: O ensino da aritmética deve proporcionar, além de um sólido domínio da matéria, um fortalecimento da confiança em si, um despertar da alegria pela atividade própria e o desenvolvimento de um pensar móvel e não bitolado.

Nas escolas Waldorf, o ensino é dividido em três graus. No primeiro, que abrange os primeiros cinco anos escolares, as contas são desenvolvidas a partir do âmbito de atividades que ainda está intimamente ligado com as funções vitais da criança. E pouco a pouco ampliadas "de dentro para fora" no segundo grau, do 6° ao 8° ano. É o aspecto prático que predomina. O capítulo "Problemas Práticos" se destina a essa fase. A transição para o terceiro grau, do 9° ano para cima é caracterizado pelo acréscimo do ponto de vista racionalista. Isto é exposto, por meio de alguns exemplos, no ultimo capítulo "Perspectivas para o Ensino no Segundo Ciclo."

## CONTAR

O primeiro encontro da criança com o campo da aritmética situa-se na idade pré-escolar e geralmente é um acontecimento alegre. A criança ouve outros contarem, ela ouve essas palavras curtas que geralmente começam com "um", e onde cada uma tem que esperar até que de "entrada" para aquela que segue. Realmente, essas palavras tem algo de todo especial. Se a criança vai perto da mãe e lhe diz "um, dois, três, cinco, seis". Se a criança vai procurar o pai ou qualquer pessoa, a reação é a mesma. Em geral não dão tanta atenção às palavras que a gente pronuncia uma depois da outra, mas quando se trata de contar, sabem-no muito bem e atuam com muita decisão. Tudo isso, a criança nota primeiro na maneira como as pessoas reagem.

Quando passa para o primeiro ano, esse relacionamento para com os números é renovado e sistematicamente explorado e cultivado. No começo da primeira época de aritmética, (*) o professor perguntará, por exemplo, se uma das crianças já sabe contar. Talvez se apresentem todos os alunos, mas pela maneira como elas levantam a mão, já se vê quais as crianças que se sentem seguras. O professor pedirá a uma criança começar, depois de alguns números outras continuaram etc. Recomenda-se começar com crianças onde o professor tem a impressão que não irão muito longe, e guardar os mais seguros para a continuação no momento em que os números já são maiores. Também não esperará com a chamada do próximo até que o procedente fique "encalhado". Assim, grande parte da classe já participará no primeiro dia terá a impressão "Eu também fiz uma contribuição", em vez de "Fiquei encalhado". Naturalmente não bastará contar uma vez. O professor repetirá sempre, isoladamente ou em grupos, ou até, a classe inteira. Crianças cuja atividade intelectual ainda não ficou autônoma acompanharão as contas com certos movimentos. O professor pedirá aos alunos contar em voz alta, em voz baixa, rapidamente, vagarosamente, etc. A repetição, não constitui nessa idade, algo enfadonho, mas uma atividade própria, um incremento constante da auto-segurança. Contando a criança aprende um elemento básico de toda a aritmética, a sequência ordenada e orientada. Os números naturais são ordenados por seguirem uma ordem determinada e orientados para percorrerem sempre um sentido determinado.

**(*) No currículo das escolas Waldorf a aritmética é dada em "épocas", isto é, em aulas duplas dadas nas primeiras horas, durante várias semanas.**

Se as crianças contam andando, determinado grupo de números, cai no pé esquerdo e outro, no direito. Formam-se os dois grupos dos números pares e ímpares.

Em geral, as crianças gostam de contar, com ou sem o acompanhamento de movimentos. Contar lhes proporciona a oportunidade de falar durante mais tempo do que costumas. De vez em quando as crianças perguntam: " Como continua?" Chegam aos 21, 22, 23, 24, depois 31, 32, 33, 34 e 41, 42, 43, 44. Notam que um, dois, três... voltam sempre. Isso facilita o contar; a capacidade de contar até bem longe, que antes admiravam em outras crianças, se lhes torna agora mais acessível. Chegando, por exemplo, aos 39, basta saber a próxima "palavra de entrada": 40, e com isso, nova série está garantida: 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49. Aí é preciso nova "entrada": 50, e depois se conta alegremente 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59. Assim outro elemento se junta a sequência ordenada e orientada: aquela da divisão rítmica.

Depois de praticar o contar de várias maneiras, o professor fará um dia o seguinte: Tendo as crianças chegado aos 20, ele levanta um dos números 21, 22, 23, 24 e depois o polegar e os dedos da outra mão: 25, 26, 27, 28, 29. Chegando a nova "entrada" 30, o professor novamente levanta o polegar da primeira mão, depois os dedos 31, 32, 33, 34. De 35 a 39 novamente o polegar e os dedos da outra mão. As crianças vêem que se chega sempre ao fim dos dedos quando o contar termina os números que começam com uma palavra "de entrada". Conseguimos dessa maneira, e de acordo com o grupo etário, visualizar a relação do sistema decimal com os 10 dedos. Temos o sistema decimal porque temos 10 dedos.

Mais um tempinho e as crianças perceberão que há nas "palavras de entrada" uma repetição do contar. Na palavra "trinta" ouvem a palavra "três", em "quarenta": "quatro", em "cinqüenta" ouvem a palavra: "cinco", etc. Chegam dessa maneira até a "descobrir" novas palavras de entrada.

Mais tarde, verificarão que o mesmo acontece com as centenas e até com os milhares. Contar sempre implica divisão rítmica. Quando se chega a esses números grandes, talvez uma criança que pergunte: "Mas até quando é que se pode continuar a contar?" A resposta de que não há fim e de que se pode sempre ir mais longe, provoca grande admiração. Tudo no mundo tem um fim, menos o contar. Esse fato de que o contar nos conduz alem dos limites do mundo das coisas, é uma experiência fundamental da matemática.

Ao contar verbal se junta um dia o contar por escrito. Muitas crianças já conhecem os símbolos quando entram no primeiro ano. Novamente, o professor perguntará um dia

quais as crianças que já sabem como se escrevem os números 1, 2, 3, 4, etc. Os alunos os pintam na lousa. Em seguida são escritos continuadamente e finalmente, em fileiras. Em cada linha (fileira horizontal) e coluna (fileira vertical) aparecem as repetições para que a ordem toda seja produzida nos cadernos tão perfeitamente como possível:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
| **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| **21** | **22** | **23** | **24** | **25** | **26** | **27** | **28** | **29** | **30** |
| **31** | **32** | **33** | **34** | **35** | **36** | **37** | **38** | **39** | **40** |
| **41** | **42** | **43** | **44** | **45** | **46** | **47** | **48** | **49** | **50** |
| **51** | **52** | **53** | **54** | **55** | **56** | **57** | **58** | **59** | **60** |
| **61** | **62** | **63** | **64** | **65** | **66** | **67** | **68** | **69** | **70** |
| **71** | **72** | **73** | **74** | **75** | **76** | **77** | **78** | **79** | **80** |
| **81** | **82** | **83** | **84** | **85** | **86** | **87** | **88** | **89** | **90** |
| **91** | **92** | **93** | **94** | **95** | **96** | **97** | **98** | **99** | **100** |

Um dia, o professor pode trazer um livro impresso e chamar a atenção para a numeração das páginas. Abrindo o livro em qualquer lugar, a página à esquerda terá sempre o número par, e à direita, um número impar. Pede-se às crianças verem nas bibliotecas de seus pais se isso acontece em todos os livros. A resposta afirmativa é trazida alegremente à escola. Em seguida, pede-se-lhes acompanhar a numeração nos números das casas, no relógio, no calendário, etc. Encontra na realidade exterior o que primeiro conhecem pela própria atividade pessoal.

## A CONTAGEM E A SEQUÊNCIA DAS TABUADAS

Podemos passar das divisões rítmicas inertes ao contar, para outras divisões. Em vez de contar uniformemente, podemos fazer uma sequência de acentuações, por exemplo, em cada terceiro número.

1, 2, **3**, 4, 5, **6**, 7, 8, **9**, 10, 11, **12**, ...

Fazendo pronunciar os números não acentuados 1 e 2, 4 e 5, 7 e 8... em voz sempre mais baixa, até tornarem-se quase completamente inaudíveis, só ficam os números:

3, 6, 9, 12...

Chegamos dessa maneira a tabuada de 3. Procederemos de maneira analógica para deduzir as tabuadas de 2, 4, e 5. Podemos acompanhar o contar rítmico com movimentos do corpo para termos sempre uma participação de todo o organismo.

Depois de muitos exercícios desse tipo, dividiremos a classe em dois grupos. Um deles representa a tabuada de dois. O segundo a de três. O professor conta na frente da classe, e cada vez que diz um número contido numa das tabuadas o grupo em questão fala em voz alta. Teremos a seguinte sequência:

| **Números** | | | **Participação** |
|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 13 | Nenhum grupo |
| 2 | 8 | 14 | Primeiro grupo |
| 3 | 9 | 15 | Segundo grupo |
| 4 | 10 | 16 | Primeiro grupo |
| 5 | 11 | 17 | Nenhum grupo |
| 6 | 12 | 18 | Ambos os grupos |

As entradas dos grupos repetem-se depois de 6 números. Aqueles onde os dois falam, constituem a tabuada de 6 a qual pode assim ser deduzida das tabuadas de 2 e de 3.

Em seguida dividiremos a classe em 4 grupos que representam, respectivamente, as tabuadas de 2, 3, 4 e 6. O grupo da tabuada de 2 só falará nos números que fazem parte da sua tabuada; em outras palavras participará nos números pares e silenciará nos

ímpares. O grupo que representa a tabuada de 3, só falará nos números que dela fazem parte, ficando calado nos demais. O mesmo se dá com os dois grupos. Se o professor recita os números, nenhum grupo o acompanha no 1. No 2, o grupo da tabuada do 2 participará os demais ficando calados. No 3 falará o grupo da tabuada de 3, no 4 os grupos da tabuada de 2 e 4. No 5, ninguém falará, no 6 falarão 3 grupos, ou seja, os das tabuadas 2, 3, e 6. Surge então à pergunta se haverá um número no qual todos os grupos falarão. Bem, a gente verá. Continua a repetição: no 7 ninguém falará; no 8, dois grupos, os das tabuadas de 2 e de 4; no 9, só o grupo de 3, no 10 só o grupo de 2, no 11 ninguém. A participação parece diminuir. Mais eis que chega o 12, e nele toda a classe participa. Todas as crianças falaram e ninguém tem dúvidas que o 12 seja um número especial. É, aliás, o numero 12 que ocupa o ponto mais alto no mostrador do relógio.

As deduções dadas às crianças devem resistir a toda crítica. Ao que precede alguém poderia objetar: as tabuadas já foram escolhidas de modo a conter o 12, senão os 4 grupos teriam ficado com as tabuadas de 2, 3, 4, 5 e não 2, 3, 4 e 6. A isso replicamos que se tivéssemos feito assim, o primeiro número que reunisse os quatro grupos, teria sido o 60. Teríamos esperado 5 vezes mais. A escolha das sequências de 2, 3, 4 e 6 é a que de todas chega primeiro a um numero comum. Não se pode, portanto, falar de uma escolha arbitrária feita em vista do 12; a importância desse numero fica assim ainda mais ressaltada. Muitos outros exercícios de combinação de tabuadas podem ser feito de maneira analógica.

Nas contas por escrito, os exercícios feitos verbalmente serão repetidos. De acordo com os ritmos marcados pela pronuncia em voz mais ou menos alta. Os números serão escritos em tamanho maior ou menor:

1 2 **3** 4 5 **6** 7 8 **9** 10 11 **12**

Depois, o tamanho dos números menores ficará sempre mais reduzido até que não sejam mais escritos:

**3** **6** **9** **12**

Assim como existem na repetição das tabuadas as possibilidades de variações entre: voz alta e baixa, rapidamente e vagarosamente, tonalidade aguda ou baixa, temos na

reprodução por escrito: grosso e fino; grande e pequeno; várias cores e maneiras de sublinhar, etc.

A combinação de várias tabuadas pode ser feita por escrito. Escrevemos primeiro a sequência dos números naturais e depois, em cada linha, uma das tabuadas escolhidas, por exemplo:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| | 2 | | 4 | | 6 | | 8 | | 10 | | 12 | | 14 | | 16 | | 18 | | 20 |
| | | 3 | | | 6 | | | 9 | | | 12 | | | 15 | | | 18 | | |

Obtemos triângulos e entre eles as colunas de 6, 12 e 18, isto é a tabuada do 6.

Para a combinação das quatro tabuadas de 2, 3, 4 e 6 teremos:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| | 2 | | 4 | | 6 | | 8 | | 10 | | 12 | | 14 | | 16 | | 18 | | 20 |
| | | 3 | | | 6 | | | 9 | | | 12 | | | 15 | | | 18 | | |
| | | | 4 | | | | 8 | | | | 12 | | | | 16 | | | | 20 |
| | | | | | 6 | | | | | | 12 | | | | | | 18 | | |

O numero 12 que faz parte das 5 linhas salta imediatamente a vista.

O esquema que resulta da reprodução por escrito, permite verificar o que acontece com os últimos algarismos. Assim, na tabuada de 2, a sequência deste é: 2, 4, 6, 8, 0, e depois novamente, 2, 4, 6, 8, 0 em 12, 14, 16, 18, 20. Uma imagem dos passos seria a seguinte:

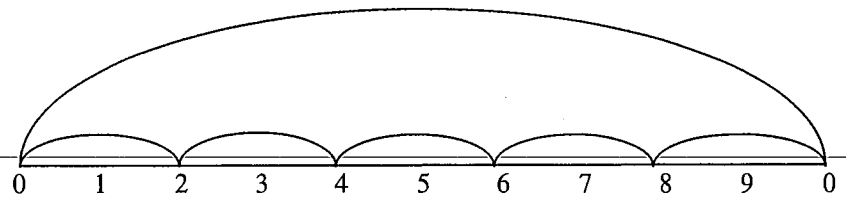



**Fig. 1**

Na tabuada do 4, a sequência é 0, 4, 8, 2, 6, que conduz a imagem seguinte cujos arcos são tanto mais altos quanto mais amplos:

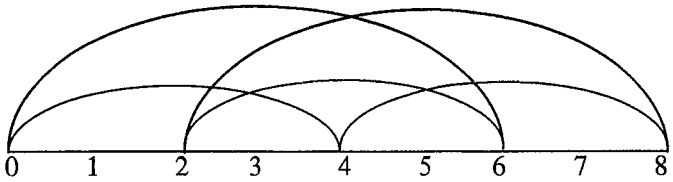



**Fig. 2**

Na tabuada do 3 há uma sequência que parece ser à primeira vista completamente irregular: 0, 3, 6, 2, 5, 8,1, 4, 7 traçando os arcos, a figura novamente é bem irregular:

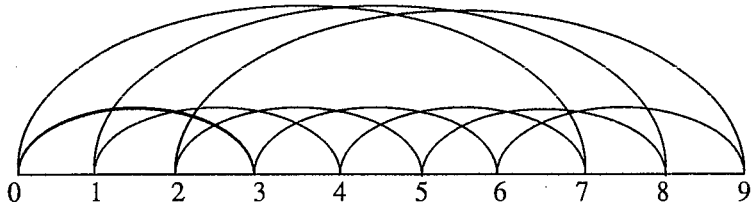



**Fig. 3**

Algo semelhante dá-se em outras 18 tabuadas.

Contar significa uma repetição rítmica em dezenas; daí a possibilidade de fazer uma disposição dos números ao longo da periferia de um círculo e de acompanhar o progresso do ultimo algarismo, por exemplo, na tabuada do 2, seja ligando pontos alternados dentro do círculo, seja traçando arcos fora dele:

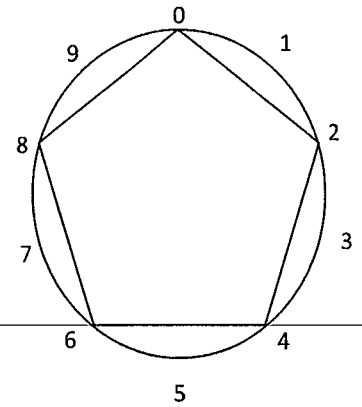



**Fig. 4**

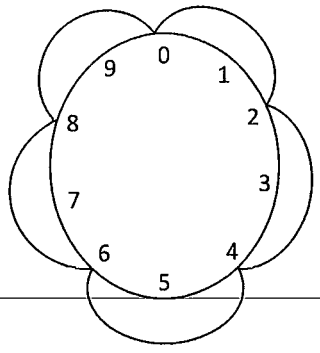



**Fig. 5**

Para a tabuada do 3, as figuras são as seguintes:

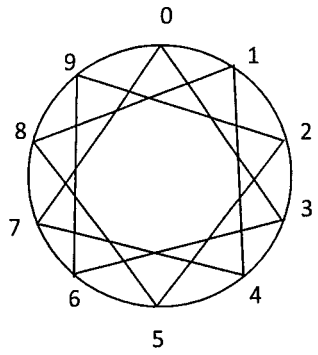



**Fig. 6**

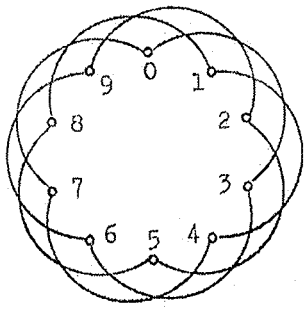



**Fig. 7**

Escrevendo as tabuadas em linhas horizontais uma em cima da outra, teremos:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |
| 9 | 18 | 27 | 38 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |
| 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

Verificamos que as tabuadas aparecem não somente nas linhas horizontais, mas também nas colunas. Cada tabuada aparece, pois, duas vezes. Podemos observar certas regularidades. Observamos o aparecimento de números pares e ímpares tanto nas linhas como nas colunas, vemos que a primeira linha e a primeira coluna são uma sequência alternada de números pares e ímpares. Na segunda linha e coluna, temos só números pares. Continuando temos alternadamente linhas e colunas com números pares e ímpares alternando e as consistindo apenas em números pares. Não existem linhas nem colunas apenas com números ímpares.

A sequência natural dos números de 1 até 9 aparece na primeira linha e na primeira coluna. Depois aparece outra vez, em sentido contrário, nos algarismos das unidades na nona linha e no nona coluna. Em 81, o ultimo algarismo é 1, em 72 é 2, em 63 é 3, etc.
A tabuada do 8 tem nos algarismos das unidades a sequencia dos números pares em sentido contrário; a de 4 tem nas unidade também algarismos pares: 0, 4, 8, 2, 6; porém não na ordem natural, mas misturada. A tabuada do 6 tem a mesma sequencia de algarismos, mas em sentindo contrário: 6, 2, 8, 4, 0. Existem, portanto, relações entre as tabuadas conforme as linhas de ligação da figura seguinte:

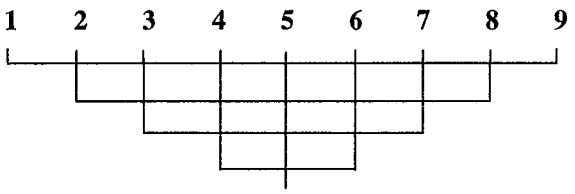



Fig. 8

O único a ficar só é o 5; os algarismos das unidades, lidos em qualquer sentido 5, 0, 5, 0, 5, 0, 5, 0, 5, dão sempre a mesma sequencia alternada 5 e 0. Essa tabuada é complemento de si própria para dar 10:

1 9 = 10
2 8 = 10
3 7 = 10
4 6 = 10
5 5 = 10

A diagonal que no quadrado das tabuadas, corre do canto superior esquerdo ao centro inferior direito, contém os quadrados 1 = 1 x 1; 4 = 2 x 2; 9 = 3 x 3, etc. Os números da outra diagonal:

10 = 1 X 10
18 = 2 X 9
24 = 3 X 8
28 = 4 X 7
30 = 5 X 6
30 = 6 X 5
28 = 7 X 4
24 = 8 X 3
18 = 9 X 2
10 = 10 X 1

São números que resultam da multiplicação de dois fatores, um dos quais aumenta de 1 a 10, enquanto o outro decresce de 10 a 1.

A primeira diagonal representa no quadrado das tabuadas um eixo de simetria. É só nela que encontramos alguns números que ocorrem apenas uma vez, como por exemplo: 1, 25, 49... Em geral, os números ocorrem duas vezes, alguns três vezes, como 4, 9, 16... e outros quatro vezes como 6, 8, 10, 12, 18, 20. Se ligarmos os números na metade superior direita do quadro por uma curva; veremos corresponder a ela na metade inferior esquerda uma curva simétrica que liga os mesmos números que a outra.

## INTRODUÇÃO DAS 4 OPERAÇÕES

**Somar -** Realizamos o passo do simples "contar" para "somar" da seguinte maneira: em vez de começar a contar com 1, começamos com vários números. O professor diz: 4, e os alunos continuam: 5, 6, 7, 8, 9, 10; ou o professor começa com 7, e os alunos continuam: 8, 9, 10, 11, 12, 13... Primeiro convém deixar as crianças continuar certo tempo, para se chegar depois a uma mudança mais rápida. Em seguida, diremos aos alunos: "Agora vamos sempre contar apenas em três números. Por exemplo:"

4 e as crianças dirão 5, 6, 7;
7 e as crianças dirão 8, 9, 10;
12 e as crianças dirão 13, 14, 15...

Depois de vários exercícios, com números de partida e números de passos variáveis, o professor pede que os alunos contem em voz baixa, com exceção do ultimo número. Assim:

4, as crianças em voz baixa 5, 6, em voz alta 7
7, as crianças em voz baixa 8, 9, em voz alta 10
12, as crianças em voz baixa 13, 14, em voz alta 15

Finalmente os números intermediários não serão mais pronunciados, só o ultimo. Depois do 12, ouve-se só o 15.

Como se vê, visamos à execução de uma audição, mais fundamentando-la num processo gradativo ao longo da sequência dos números.

Agiremos da mesma maneira das contas por escrito. Usamos nas lousas e nos cadernos o que se pode chamar de "corredor de contar" (*).

O aluno tem diante de si a sequência dos números e deixa correr o dedo ao longo dela. Se a conta a fazer for 4 + 3 o "corredor de contar" correrá três passos a partir do 4, chegando, portanto, ao 5, ao 6 e parando no 7. Muitos exemplos serão executados dessa maneira sem dificuldade.

**(*) NT - Cada professor empregará o termo que achar mais conveniente, em relação à fantasia da sua classe e â sai própria.**

Em dado momento, quando se faz novamente tal exercício, o progresso do "corredor de contar" será acompanhado de um gesto horizontal da mão esquerda para a direita; e o gesto de parar será acompanhado com um gesto de partida: um movimento vertical da mão de cima para baixo. Depois o resultado é sublinhado duas vezes. Em seguida, os alunos anotam o que fizeram: Começaram com 4, continuaram contando, pararam no momento certo, e assim chegaram, depois de 3 passos, no 7, número que se sublinha duas vezes:

$$4 + 3 = 7,$$

Sendo que o sinal " +" é o resultado dos movimento horizontal e vertical do progredir e do parar, e o sinal " =" os dois traços, agora colocados à esquerda, com os quais se sublinhava o 7. A ajuda do movimento e, dos gestos será necessária até que a atividade do raciocínio tenha atingido sua plena autonomia. Quanto tempo for necessário dependerá de cada aluno.

**Multiplicação -** Considerando que os números naturais constituem, como já dissemos, uma sequência orientada, recomendamos esperar mais um pouco com o "contar para traz" e com a subtração, tratando primeiro da multiplicação. O que se acrescenta aí a contagem rítmica é uma segunda contagem que corre paralela à primeira. Teremos assim para a tabuada de 6:

6.....1
12.....2
18.....3
24.....4

Outra maneira de falar e de escrever seria:

$$1 \times 6 = 6$$
$$2 \times 6 = 12$$
$$3 \times 6 = 18$$
$$4 \times 6 = 24$$

Podemos tirar do quadro das tabuadas um valor qualquer, como por exemplo, 7 x 6 = 42, olhando primeiro no lado superior do quadrado para o numero 7 e descendo ao longo da coluna correspondente, olhando em seguida para o lado esquerdo do quadrado

onde, no numero 6, se vai à direita. Quando a linha horizontal e a coluna vertical se encontram, acha-se o 42. Para muitas crianças, o uso repetido do quadrado é uma ajuda eficaz, mesmo na multiplicação por escrito.

**Subtração -** Assim como a adição se desenvolve a partir do contar, a subtração nasce do "contar para traz". Enquanto não há limite para o contar, a gente só pode contar para traz até um determinado ponto. Há um limite para os passos possíveis.

Começamos com vários exercícios de contar para traz, como o temos feito antes para a contagem normal. Aquilo que era necessário para a transição da adição, isto é, o deslocamento do ponto inicial, não é necessário na contagem retrocessiva, pois existe sempre, já que se tem que começar com um numero determinado qualquer. No que se refere ao movimento, contar para traz conduz ao andar para traz. Com efeito, andar para traz corresponde à inversão da direção melhor do que a virar-se. Quanto à operação escolhida, o "corredor de contar" irá para traz, e pouco a pouco a atividade do intelecto subtrairá a dois membros. Para anotar a subtração a mão, movimentando-se horizontalmente da direita para a esquerda, executará o gesto do retroceder; o gesto da parada correta será executada pelo movimento vertical de cima para baixo. Assim os gestos do "7 menos 3" conduzem primeiro a "7 + 3" sendo o traço horizontal feito da direita para a esquerda. As crianças, por si só, descobrirão que só se pode descobrir a existência de uma subtração quando se acompanha com os olhos as anotações enquanto são feitas, e não depois, quando se olha apenas o que está escrito. Para tirar a dúvida, diremos simplesmente: "Já que chegamos à subtração, já sabemos onde devemos parar; não mais preciso anotá-lo; podemos simplesmente escrever:

$$7 - 3 = 4$$

Não faz mal se as crianças ainda escrevem o traço da subtração: "-" da direita para a esquerda, de acordo com o movimento em sentido contrário. Isso desaparecerá sozinho.

**Divisão -** Assim como a subtração representa o caminho inverso à adição, a divisão é o caminho contrário da multiplicação. Pela progressão na tabuada do 6, chegamos a

$$6 = 1 \times 6$$

$$12 = 2 \times 6$$

$$18 = 3 \times 6$$

$$24 = 4 \times 6$$

Ora é possível voltar de 4 x 6 a 1 x 6. Descobrimos que 24 está na linha dos 6, sendo 24 = 4 x 6. Quantas vezes 6 está em 24? Resposta 4 x 6 = 24. Como a divisão é a operação que mais se apóia em coisas concretas, ela será melhor estudada quando os alunos já tiverem feito algum progresso nas "operações com objetos concretos" (pgs. 39 - 42 do livro alemão "Das Rechnen an Gegenständen".

## O TREINO DAS OPERAÇÕES COM NÚMEROS PUROS

Para exercitar as quatro operações e ao mesmo tempo manter o interesse vivo, recomenda-se usar exercícios onde haja relações continuadas entre números. Com isso, focalizaremos antes séries de exemplos e não problemas isolados. Uma dessas séries sugere quando se somam continuadamente os números naturais e se faz as diferenças entre os resultados. Essas somas são 1, 4, 6, 10... com a alternância de dois números ímpares dos números naturais:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | = 1 | 1 - 0 = 1 |
| 1 + 2 | = 3 | 3 - 1 = 2 |
| 1 + 2 + 3 | = 6 | 6 - 3 = 3 |
| 1 + 2 + 3 + 4 | = 10 | 10 - 6 = 4 |
| 1 + 2 + 3 + 4 + 5 | = 15 | 15 - 10 = 5 |
| 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 | = 21 | 21 - 15 = 6 |
| 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 | = 28 | 28 - 21 = 7 |
| 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 | = 36 | 36 - 28 = 8 |
| 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 | = 45 | 45 - 36 = 9 |
| 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 | = 55 | 55 - 45 = 10 |

Outra série resulta da adição dos números em vez da adição de todos os números naturais. Suas somas dão os quadrados e suas diferenças e os números ímpares (*)

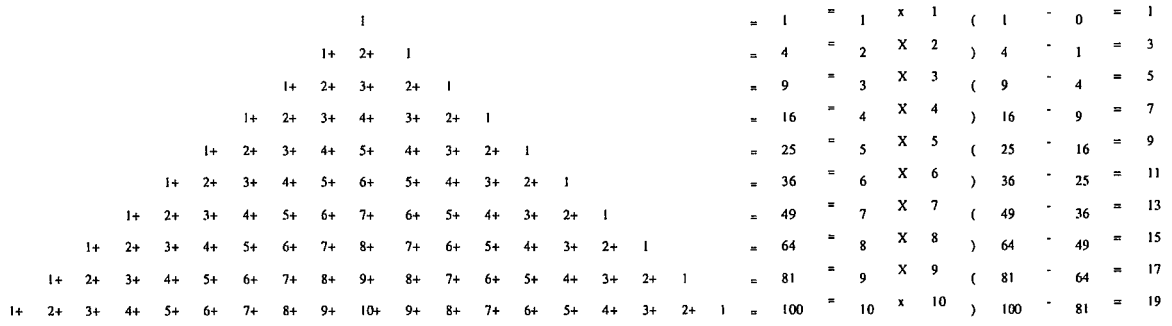
| | | |
|---|---|---|
| 1 | = 1 | = 1 ( 1 - 0 = 1 |
| 1 + 3 | = 4 | = 2 ) 4 - 1 = 3 |
| 1 + 3 + 5 | = 9 | = 3 ( 9 - 4 = 5 |
| 1 + 3 + 5 + 7 | = 16 | = 4 ) 16 - 9 = 7 |
| 1 + 3 + 5 + 7 + 9 | = 25 | = 5 ( 25 - 16 = 9 |
| 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 | = 36 | = 6 ) 36 - 25 = 11 |
| 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 | = 49 | = 7 ( 49 - 36 = 13 |
| 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 | = 64 | = 8 ) 64 - 49 = 15 |
| 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 | = 81 | = 9 ( 81 - 64 = 17 |
| 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 | = 100 | = 10 ) 100 - 81 = 19 |

Somando os sete primeiros números ímpares temos a soma 7 x 7 = 49, quando são oito, 8 x 8 = 64, etc. Os quadrados são alternadamente ímpares e pares.

***Essa relação está na base de leis de Galileu sobre a queda: os caminhos percorridos por corpos que caem livremente, depois de várias unidades de tempo subsequentes, estão entre si como os quadrados destas, e os caminhos percorridos durante várias unidades de tempo subsequente, como os números ímpares.**

```
2                          = 2  = 2 x 1  ( 2  - 0  2
2 + 4                      = 6  = 2 x 3  ) 6  - 2  4
2 + 4 + 6                  = 12 = 2 x 6  ( 12 - 6  6
2 + 4 + 6 + 8              = 20 = 2 x 10 ) 20 - 20 8
2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30 = 2 x 15 ( 30 - 24 10
```

A soma dos números pares dá o dobro das somas obtidas somando os naturais; como diferenças reaparecem os números pares:




Somando sequência de números naturais "subindo e descendo", temos novamente os quadrados:

O número mais alto ao qual se chegou numa linha, multiplicado por si próprio, dá o quadrado que equivale à soma de todos os números da linha.

Somando "subindo e descendo" apenas os números ímpares, as somas sempre serão impares. Suas diferenças são a tabuada do 4.

```
                    1                    = 1  (
                 1+ 3+  1                = 5  ) 5  - 1  = 4
              1+ 3+ 5+  3+ 1             = 13 ( 13 - 5  = 8
           1+ 3+ 5+ 7+  5+ 3+ 1          = 25 ) 25 - 13 = 12
        1+ 3+ 5+ 7+ 9+  7+ 5+ 3+ 1       = 41 ( 41 - 25 = 16
     1+ 3+ 5+ 7+ 9+ 11+ 9+ 7+ 5+ 3+ 1+ = 61 ) 61 - 41 = 20
```

Fazendo o mesmo com os números pares, as somas serão pares, e as diferenças serão aqueles múltiplos de 2 que se situam entre os números das tabuadas de 4: 2, 6, 10, 14, etc.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 2 | | | | | = | 2 | ( | 2 | - | 0 | = | 2 | ( | | | | | | | | |
| | | | 2+ | 4+ | 2 | | | | | = | 8 | ) | 8 | - | 2 | = | 6 | ) | 6 | - | 2 | = | 4 | | | |
| | | 2+ | 4+ | 6+ | 4+ | 2 | | | | = | 18 | ( | 18 | - | 8 | = | 10 | ( | 10 | - | 6 | = | 4 | | | |
| | 2+ | 4+ | 6+ | 8+ | 6+ | 4+ | 2 | | | = | 32 | ) | 32 | - | 18 | = | 14 | ) | 14 | - | 10 | = | 4 | | | |
| 2+ | 4+ | 6+ | 8+ | 10+ | 8+ | 6+ | 4+ | 2 | | = | 50 | ( | 50 | - | 32 | = | 18 | ( | 18 | - | 14 | = | 4 | | | |

As diferenças das diferenças, as chamadas segundas diferenças, sempre são iguais a 4.
O que fizemos com os números da tabuada de 2, os números pares, podemos estendê-lo a qualquer outra tabuada. Teremos assim para a tabuada de 3:

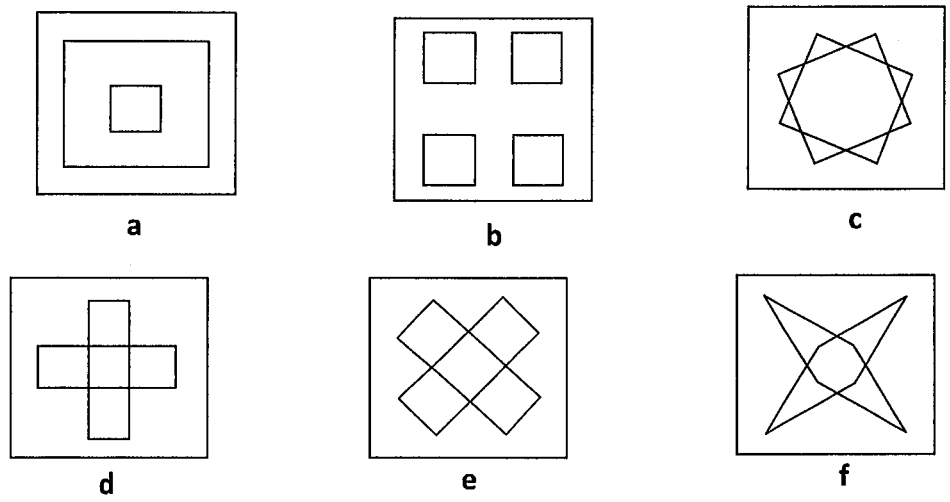
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 3 | | | | | = | 3 | ( | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | 3+ | 6+ | 3+ | | | | | = | 12 | ) | 12 | - | 3 | = | 9 | ( | | | | | | | | |
| | | 3+ | 6+ | 9+ | 6+ | 3 | | | | = | 27 | ( | 27 | - | 12 | = | 15 | ) | 15 | - | 9 | = | 6 | | | |
| | 3+ | 6+ | 9+ | 12+ | 9+ | 6+ | 3 | | | = | 48 | ) | 48 | - | 27 | = | 21 | ( | 21 | - | 15 | = | 6 | | | |
| 3+ | 6+ | 9+ | 12+ | 15+ | 12+ | 9+ | 6+ | 3 | | = | 75 | ( | 75 | - | 48 | = | 27 | ) | 27 | - | 21 | = | 6 | | | |

As somas alternam entre pares e ímpares, as diferenças são sempre iguais a 6.
Tais sequências fornecem o ensejo para treinar a escrever algarismos um em baixo do outro, muito útil para as contas armadas. Nos esquemas das páginas 15 e 16 descobrimos triângulos retângulos isósceles tendo os catetos nas posições horizontal e vertical, naqueles desta página, triângulos isósceles com base horizontal.
Outros exercícios podem ter como ponto de partida dados históricos. Quando Dürer fez a água-forte normalmente de denominada "Melancolia" * ele pretendeu representar a construção pela escada, o trabalho de carpinteiro pela plaina, a biologia pelo crânio, a cronometria pelo relógio de areia, a geometria por corpos meio-regulares e a matemática pura pelo quadrado de números na parede. Albert Dürer não era apenas um artista notável, mas tornou-se como inventor da perspectiva, também criativo no campo das ciências matemáticas. O quadrado de Dürer contem 4 x 4 = 16 quadrados parciais onde são inscritos os números de 1 a 16. Porem em sua ordem natural, mas misturados. Somando os números da coluna na esquerda da figura seguinte, temos 1 + 12 + 8 + 13 = 34. A soma dos números da segunda é: 15 + 6 + 10 + 3 = 34, da terceira: 14 + 7 + 11 + 2 = 34 e da coluna direita; 4 + 9 + 5 + 16 = 34.

*** Examinando melhor o titulo "Melencholia"; percebe-se que é seguido de I igual ao I da palavra Melencholia. Como a língua usada é o latim no qual I tem a função de um imperativo de verbo "ire" = ir, a tradução do título não é "Melancolia", mas sim: "Melancolia, vá!" ou "Melancolia, fuja!" Esse, alias, é o sentido correto do quadro.**

Fig. 9

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 14 | 4 |
| 12 | 6 | 7 | 9 |
| 8 | 10 | 11 | 5 |
| 13 | 3 | 2 | 16 |




Os números são repetidos de tal maneira que cada coluna apresenta a mesma soma, ou seja, ¼ da soma dos números de 1 a 16.

Somando os números das linhas horizontais, temos

$$1 + 15 + 14 + 4 = 34$$
$$12 + 6 + 7 + 9 = 34$$
$$8 + 10 + 11 + 5 = 34$$
$$13 + 3 + 2 + 16 = 34$$

Portanto, também as linhas dão as mesmas somas. A soma dos números ao longo das diagonais é:

$$1 + 6 + 11 + 16 = 34$$
$$4 + 7 + 10 + 13 = 34$$

Os números nos cantos do quadrado têm por soma:

$$1 + 4 + 16 + 13 = 34$$

Aqueles ao redor do centro:

$$6 + 7 + 11 + 10 = 34$$

(veja desenho **a** na fig. 9)

Para os quadrados parciais temos:

$$1 + 15 + 6 + 12 = 34$$
$$14 + 4 + 9 + 7 = 34$$
$$11 + 5 + 16 + 2 = 34$$
$$8 + 10 + 3 + 13 = 34$$

(veja desenho **b** na fig. 9)

Outros quadrados com a soma 34 são formados pelos números seguintes:

$$1 + 14 + 11 + 8 = 34$$
$$15 + 4 + 5 + 10 = 34$$
$$6 + 9 + 16 + 3 = 34$$
$$12 + 7 + 2 + 13 = 34$$

Existem até dois quadrados inclinados formados pelos números imediatamente seguintes aos cantos, num sentido:

$$15 + 9 + 2 + 8 = 34$$

e no outro

$$12 + 3 + 5 + 14 = 34$$

(veja desenho **c** na fig. 9)

Contudo, nem todos os arranjos quadrados que podem ser formados dentro do quadrado original, tem a soma 34. Por exemplo:

$$15 + 14 + 7 + 6 + 42$$
$$10 + 11 + 2 + 3 + 26$$
$$12 + 6 + 10 + 8 + 36$$
$$7 + 9 + 5 + 11 + 32$$

Existem, portanto, no total 12 quadrados com a soma 34.

Passando dos quadrados parciais para retângulos parciais, temos:

$$15 + 14 + 2 + 3 = 34$$
$$12 + 9 + 5 + 8 = 34$$
$$1 + 15 + 10 + 8 = 34$$
$$12 + 6 + 3 + 13 = 34$$
$$14 + 4 + 5 + 11 = 34$$
$$7 + 9 + 16 + 2 = 34$$
$$1 + 14 + 7 + 12 = 34$$
$$15 + 4 + 9 + 6 = 34$$
$$8 + 11 + 2 + 13 = 34$$
$$10 + 5 + 16 + 3 = 34$$

(veja desenho **d** na fig.9)

Mais retângulos inclinados:

$$15 + 5 + 2 + 12 = 34$$
$$14 + 9 + 3 + 8 = 34$$

(veja desenho **e** na fig. 9)

Perfazendo um total de 12 retângulos tendo por soma 34.

Existem, porem, retângulos com outras somas, como por exemplo:

$$15 + 14 + 11 + 10 = 50$$
$$6 + 7 + 2 + 3 = 18$$
$$12 + 7 + 11 + 8 = 38$$
$$6 + 9 + 5 + 10 = 30$$

Existem também arranjos de losangos com a soma 34:

$$1 + 7 + 16 + 10 = 34$$
$$4 + 6 + 13 + 11 = 34$$

(veja desenho **f** na fig. 9)

E arranjos paralelogramos:

$$1 + 15 + 16 + 2 + 34$$
$$14 + 4 + 3 + 13 + 34$$
$$1 + 5 + 16 + 12 + 34$$
$$8 + 4 + 9 + 13 + 34$$

$$1 + 14 + 16 + 3 + 34$$
$$15 + 4 + 2 + 13 + 34$$
$$1 + 9 + 16 + 8 + 34$$
$$12 + 4 + 5 + 13 + 34$$

$$15 + 11 + 2 + 6 = 34$$
$$14 + 7 + 3 + 10 = 34$$
$$12 + 6 + 5 + 11 = 34$$
$$8 + 10 + 9 + 7 = 34$$

$$15 + 7 + 2 + 10 + 34$$
$$14 + 11 + 3 + 6 + 34$$
$$12 + 7 + 5 + 10 + 34$$
$$6 + 9 + 11 + 8 + 34$$

O ultimo grupo também pode ser traçado por meio de uma linha em zigue-zague.

$$15 + 7 + 10 + 2 = 34$$
$$14 + 6 + 11 + 3 = 34$$
$$12 + 10 + 7 + 5 = 34$$
$$8 + 6 + 11 + 9 = 34$$

Como trapézios com a soma 34, temos:

$$1 + 15 + 7 + 11 + 34$$
$$1 + 12 + 10 + 11 + 34$$
$$6 + 10 + 2 + 16 + 34$$
$$7 + 11 + 3 + 13 + 34$$
$$4 + 14 + 6 + 10 + 34$$

$$4 + 9 + 11 + 10 + 34$$
$$16 + 5 + 7 + 6 + 34$$
$$13 + 8 + 6 + 7 + 34$$

E mais os quadriláteros irregulares:

$$14 + 1 + 13 + 5 = 34$$
$$4 + 16 + 2 + 12 = 34$$
$$1 + 13 + 11 + 9 = 34$$
$$4 + 16 + 8 + 6 = 34$$
$$1 + 14 + 13 + 6 = 34$$
$$12 + 2 + 14 + 6 = 34$$
$$2 + 14 + 8 + 10 = 34$$
$$9 + 2 + 12 + 11 = 34$$
$$5 + 15 + 8 + 6 = 34$$
$$5 + 14 + 8 + 7 = 34$$
$$5 + 15 + 3 + 11 = 34$$
$$3 + 15 + 9 + 7 = 34$$
$$12 + 9 + 3 + 10 = 34$$
$$4 + 12 + 11 + 7 = 34$$
$$6 + 5 + 13 + 10 = 34$$
$$1 + 14 + 9 + 10 = 34$$
$$13 + 2 + 5 + 14 = 34$$
$$3 + 16 + 7 + 8 = 34$$
$$4 + 15 + 12 + 3 = 34$$
$$4 + 15 + 8 + 7 = 34$$

Juntando o numero dos quadriláteros, temos:

| | |
|---|---|
| 10 | Linhas |
| 12 | Quadrados |
| 12 | Retângulos |
| 2 | Losangos |
| 16 | Paralelogramos |
| 8 | Trapézios |
| 26 | Quadriláteros |
| 86 | No total |

Se de um numero qualquer do quadrado traçamos uma linha reta para seu centro e a prolongamos alem do centro, chegando a igual distância do centro a um numero tal que a soma dos dois números que são simétricos em relação ao centro, perfazem 17, ou seja, a metade de 34. Dois pares de números ao arranjo dos números de 1 a 16 de acordo com o quadrado de Dürer inscrevemos primeiro os números de 1 a 16 em sua sequência normal:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

**Fig. 10**

Se deixássemos os números nessa ordem, certamente não teríamos em cada linha a mesma soma já que os números menores se encontram juntos na primeira, e os maiores na ultima linha. Com as colunas, a situação seria igual, pois, em cada coluna, a soma cresceria de 4 em relação à coluna vizinha esquerda. Deveremos, como se faz num jogo de baralho, conservar alguns números e trocar os demais. Mantemos em seus lugares os números ao longo das diagonais e que na figura acima, foram sombreados. Os outros números são trocados com os números "em frente", tomando-se o centro como ponto de simetria; isto é: 2 com 15, 3 com 14, 5 com 12, e 8 com 9. As figuras seguintes mostram esses pares e a situação depois da troca, respectivamente.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | |
| 5 | | | 8 |
| 9 | | | 12 |
| | 14 | 15 | |

**Fig. 11**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 14 | 4 |
| 12 | 6 | 7 | 9 |
| 8 | 10 | 11 | 5 |
| 13 | 3 | 2 | 16 |

**Fig. 12**

Existe também um quadrado com menos e outros com mais números. Um quadrado mágico com somas iguais nas linhas e colunas, com apenas 4 números, não é possível, mas existe com 9 números:

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

**Fig. 13**

A soma de todas as linhas e colunas é 15; a mesma soma resulta das diagonais, mas não há como no quadrado de Dürer, aquela infinidade de figuras regulares e irregulares. No quadrado de nove números, o arranjo certo se consegue partindo a seqüência natural: escrevendo-se os números em ordem diagonal.

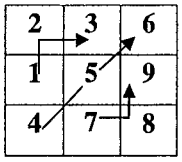



**Fig. 14**

Deixam-se os números ao longo das diagonais em seus lugares (nos quadrinhos sombreados), trocando-se apenas os outros em relação ao centro a simetria.

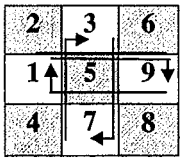



**Fig. 15**

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 7 | 6 |
| 9 | 5 | 1 |
| 4 | 3 | 8 |

**Fig. 16**

Outro caminho para se chegar ao mesmo quadrado consiste em inscrever a sequência natural num quadrado virado com a ponta para cima e circunscrito ao quadrado original, permanecem em seus lugares os números situados dentro do quadrado original, enquanto os números exteriores são transportados, horizontal e verticalmente, no sentido das flechas.

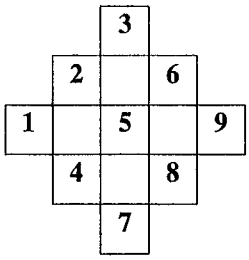



Fig. 17

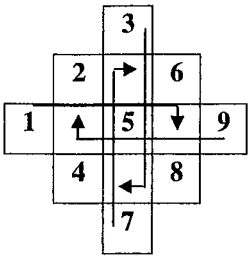



Fig. 18

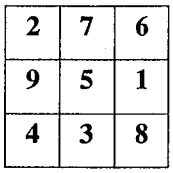



Fig. 19

No quadrado com 25 números, obtemos nas linhas horizontais, colunas e diagonais, a soma 65, isto é, a quinta parte da soma total dos números de 1 a 25. A disposição é analógica àquela do quadrado de 9 números.

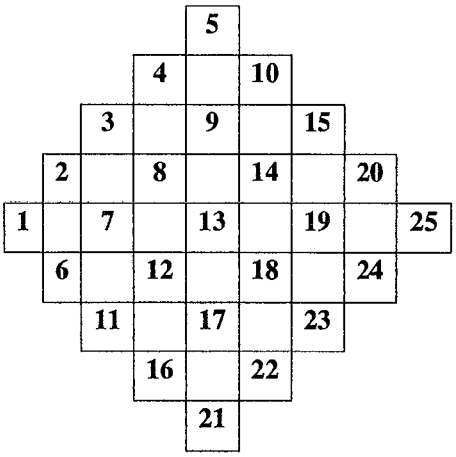



Fig. 20

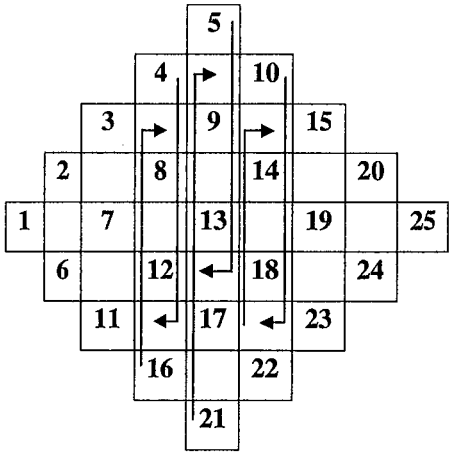



Fig. 21

Esse caminho é possível para quaisquer quadrados com um numero ímpar de quadradinhos: 9, 25, 49, etc.

Quadrados mágicos existem não só para os números naturais, mas para tabuadas. Para o quadrado com 16 números e a tabuada do 3 temos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 9 | 12 |
| 15 | 18 | 21 | 24 |
| 27 | 30 | 33 | 36 |
| 39 | 42 | 45 | 48 |

**Fig. 22**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 45 | 42 | 12 |
| 36 | 18 | 21 | 27 |
| 24 | 30 | 33 | 15 |
| 39 | 9 | 6 | 48 |

**Fig. 23**

A soma que resulta de maneira analógica ao quadrado dos números de 1 a 16 é 102. Com isso, temos a nossa disposição grande número de exercícios que podem ser aproveitados de muitas maneiras no ensino.

## AS OPERAÇÕES COM OBJETOS CONCRETOS

A transição das contas com números puros para operações com objetos pode ser feita da seguinte maneira: Um dia o professor diz à classe: Vamos contar juntos até 10. Durante a contagem, coloca-se para cada numero um lápis na mesa com um gesto rítmico bem pronunciado. Dito o ultimo numero, há 10 lápis na mesa. Repete-se a mesma operação com outros objetos, outros números e outros gestos. As crianças obviamente também querem participar, mas como nenhum tem 10 lápis, a operação se faz com lápis, borrachas, cadernos, etc., isto é, 10 objetos diferentes em vez de 10 lápis. Os movimentos rítmicos que se executam, constituem uma transição do movimento próprio (realizado enquanto se conta) à contagem de objetos já existentes. Enquanto se faz movimentos, nada fica; enquanto apenas se contam objetos já presentes, nada se move. Quando, porem, objetos são movidos durante o ato de se contar, eles permanecem como expressão visível do movimento próprio.

O próximo passo consiste em contar objetos que não são trazidos enquanto se conta, mas que são apenas vistos, por exemplo, bancos, vidraças, etc. Quando começamos a contar, as crianças só prestam atenção a si próprias; agora, tem que prestar atenção a si e aos objetos. O caminho começou na própria criança, estendeu depois dela para o mundo e acaba dirigindo-se diretamente ao mundo ambiente.

Pode-se fazer também exercícios de contar rítmicos com objetos. Contam 1, 2, 3... e colocamos sempre um lápis, formando uma fileira. Continuamos: 4, 5, 6 formando nova fileira ao lado da primeira, etc. O fim de uma fileira pode ser acompanhado por um gesto reforçado. Enquanto a contagem normal de objetos dá uma fileira sem ordem, o contar rítmico conduz a uma sequência ordenada. As crianças querem imitar os mesmos gestos e participar do acontecimento. Chamaremos então sua atenção para o fato que uma contagem rítmica também pode ser efetuada nos objetos. Já prontos, por exemplo, nas vidraças das quais há sempre 4, uma em cima da outra, ou nos bancos que se acham em fileiras de 3. Novamente transportamos um processo de dentro para fora.

Também as operações da adição e multiplicação podem ser efetuados com objetos. Percorremos exercícios anteriores tão repetidos, eventualmente de forma ampliada.

Um dia, pedimos, por exemplo, para trazer, 10 castanhas (dependendo da estação do ano e da situação geográfica). Começamos cotando as 10 castanhas, e pedimos depois às crianças dividi-las em dois montes e primeiro na ordem em que foram encontrados:

$$10 = 3 + 7$$
$$10 = 2 + 8$$
$$10 = 5 + 5$$

Em seguida, poremos os resultados em ordem e veremos se uma possibilidade faltou:

$$10 = 1 + 9$$
$$10 = 2 + 8$$
$$10 = 3 + 7$$
$$10 = 4 + 6$$
$$10 = 5 + 5$$
$$10 = 6 + 4$$
$$10 = 7 + 3$$
$$10 = 8 + 2$$
$$10 = 9 + 1$$

Constatamos haver uma coluna com números crescentes e outra com números decrescentes.

Tais situações repetem-se constantemente na vida prática. Uma criança ganhou 10 selos, ou seja, 4 da mãe e 6 do pai. Portanto:

$$10 = 4 + 6$$

Na classe há 10 vasos de flores. Dois alunos são encarregados de regá-los. Um rega 4, outro 6. Temos novamente $10 = 4 + 6$. As crianças não deixarão de descobrir muitos casos onde tais contas são realizadas. Nos exercícios, pode-se então passar de dois a três ou mais elementos.

$$10 = 2 + 3 + 5$$
$$10 = 2 + 4 + 3 + 1$$

Na contagem para traz e na subtração o professor tinha começado a falar 10 e os alunos tinhas acrescentado 9, 8, 7... Aí, é possível tirar objetos. No inicio, há 10 lápis na mesa. Com cada número, o professor tira um, com um gesto bem expressivo; quando a classe contou 9, há apenas 9 lápis na mesa, etc. Quando cotou 2, só restam 2 lápis, quando contou 1, só fica 1 lápis. Tirando este, não sobra nenhum. Na aritmética chama-se a isso "zero lápis". Podemos, portanto, dar o passo até o 0.

Em todos esses problemas, é importante que estejam bem perto da realidade. Por exemplo: um menino catou castanhas. Antes de ir para casa, contou-as. Eram 10. Colocou-as no bolso, foi para casa e tirou-as do bolso. Mas eram só 7. Descobriu então

que o bolso estava furado. Quantas castanhas perdeu no caminho? Resposta: 7 = 10 – 3. Se o problema tivesse sido formulado assim: "Um menino em casa?" Seria perfeitamente justificada a objeção: "Mas será que alguém contou as castanhas enquanto se perdiam?"

Nas contas de dividir, partiremos de 12 castanhas em vez de 10. O professor manda fazer montes de tamanho igual. Havendo 2 montes iguais, cada um contará 6 castanhas. Com 3 montes iguais, são 4, com 4 montes, 3 com 6 montes, 2. Só se os montes são iguais, podemos falar em dividir; e montes iguais só podem ser feitos em números tais que a tabuada desses números inclui o 12, isto é, quando há 2, 3, 4 e 6 montes. Nessa operação reencontramos, pois, as tabuadas.

Nos problemas compostos podemos novamente estabelecer muitas relações com a vida diária. Uma criança do 1° ano tem 7 anos. Tem um irmãozinho com 1 ano de idade. A criança tem a idade 7 vezes maior que o irmão. No ano seguinte, o aluno frequentará o 2° ano e terá 8 anos. O irmão terá então 2 anos. O aluno será 4 vezes mais velho. Um ano depois, o aluno cursa o 3° ano, com 9 anos de idade, enquanto o irmão tem 3 anos. Aí, o aluno é 3 vezes mais velho etc. Quando aos 12 anos de idade, o aluno estiver no 6° ano, o irmão terá 6 anos; o aluno será, pois 2 vezes mais velho que o pequeno que está prestes para entrar por sua vez na escola. Quando o aluno estava no primeiro ano, tinha 7 anos. O irmãozinho era um nenê. Quando o aluno tiver 12 anos, o irmão já pode acompanhá-lo em seus passeios. A diferença entre ambos não será mais muito grande, pois o grande terá apenas idade duas vezes maior. Mas quando o menino for adulto e tiver 40 anos, o irmãozinho terá 34, e muita gente não saberá qual dos dois é o mais velho...

## AS OPERAÇÕES ARMADAS

Para operações mais compridas e para números maiores é necessário fazer os cálculos por escrito. O que aí importa, é escrever os números bem, um em baixo do outro. Imaginemos que tenhamos que escrever uma série de números, menores e maiores, ao longo da margem de uma folha de papel. Esse não deve ser virado, mas permanecer na mesma posição. Nas margens superiores e inferiores, os números são escritos na ordem normal da escrita, da esquerda para a direita. Mas no lado esquerdo e direito onde anotação de números de vários algarismos não é mais paralela, mas vertical, em relação à borda, os números são escritos um em cima do outro. Do lado esquerdo, começam com os algarismos à esquerda, na própria margem e prolongam-se em distâncias variáveis, da esquerda para a direita. Na margem direita, depende do numero de "casas" do numero, e quanto ele precisa ser deslocado para a esquerda afim de que o numero inteiro caiba dentro do espaço disponível. Quem escreve no lado direito da folha deve prestar atenção maior, mas em compensação, as unidades, dezenas, centenas, etc. se acharão em alinhamento vertical, o que não acontece nas outras margens da folha.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **12** | **9** | **412** | **6** | **5726** |
| **7** | | | | **3945** |
| **4341** | | | | **1070** |
| **328** | | | | **19** |
| **71** | | | | **986** |
| **3** | | | | **114375** |
| **28** | | | | **27** |
| **4937** | | | | **16** |
| **12** | | | | **19** |
| **5** | | | | **5** |
| **9** | **81** | **7253** | | **74** |

**Fig. 24**

Os números 5726, 3945 e 1070 temos, por exemplo:

5726 = 5 milhares, 7 centenas, 2 dezenas, 6 unidades.

3945 = 3 milhares, 9 centenas, 4 dezenas e 5 unidades.

1070 = 1 milhar, 0 centenas, 7 dezenas e 0 unidades.

E todas as unidades, dezenas, centenas, etc., são escritas em baixo da outra, contas armadas, os números sempre são escritos como se estivessem na margem direita. Para exercitar isso, podemos traçar, em vez da margem, uma linha vertical e escrever números de vários tamanhos à sua esquerda:

```
  420|
   12|
 3793|
    6|
  298|
14724|
 3040|
  400|
```

Os números são escritos de tal maneira que se possa espaçá-los lateralmente, obtendo o seguinte:

```
    4 2 0
      1 2
  3 7 9 3
        6
    2 9 8
1 4 7 2 4
  3 0 4 0
    4 0 0
```

**Adição:** Nessa escrita espaçada, é fácil somar os algarismos de cada coluna, com ou sem a ajuda de um "corredor de contar" (pag. 11), obtendo:

```
    4 2 0
      1 2
  3 7 9 3
        6
    2 9 8
1 4 7 2 4
  3 0 4 0
    4 0 0
-----------
1 10 24 27 23
```

Uma conta que só abrange números que tem no máximo, centenas, o mostra em forma mais sucinta:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 256 | 2 | 5 | 6 |
| 463 | 4 | 6 | 3 |
| 592 | 5 | 9 | 2 |
| 374 | 3 | 7 | 4 |
| | 14 | 27 | 15 |

Imaginemos que tenhamos novamente que apertar as colunas. Nesse caso seria difícil escrever as somas corretamente. Se escrevermos, no exemplo acima, a soma 15 em baixo do traço, da maneira como se escrevem os números, colocados em colunas, tiramos o espaço da soma da coluna média, 27. Se o numero 27 insiste em conservar seu lugar, os algarismos 1 e 7 começam a brigar pelo lugar (ou são escritos um sobre o outro, no mesmo lugar). O mesmo acontece com o 2 do 27 e o 4 de 14. Se os algarismos forem escritos na lousa um sobre o outro, eles ficam irreconhecíveis. Para evitar isso, o 27 que achou seu lugar ocupado, pode fazer uma concessão e estabelecer uma linha mais baixa, mas conservando a coluna. Com isso, o 27 desocupa o lugar em favor do 14. O resultado será:

| |
|---|
| 256 |
| 463 |
| 592 |
| 374 |
| 1415 |
| 27 |
| 1685 |

A soma será, portanto, de 1685.

Foi o 27 que cedeu. Teria sido mais justo o 15 ocupar o seu próprio lugar apenas para o 5 e descer de uma linha com o 1. Se o 27 seguisse esse exemplo, o resultado seria:

256
463
592
374
1475
21
1685

Em vez de abaixar o 1 de 15 e o 2 de 27, podemos também escrevê-los em cima. Finalmente podemos colocá-los, em escrita pequena, em cima do traço e somá-los logo com os outros algarismos. Daí os dois passos seguintes:

| | |
|---|---|
| 256 | 256 |
| 463 | 463 |
| 592 | 592 |
| 374 | 374 |
| 21 | 21 |
| 1475 | 1685 |
| 1685 | |

No primeiro passo, as 3 adições são tomadas cada uma por si, o segundo exige um raciocínio continuo.

**Multiplicação:** Na multiplicação, as tabuadas têm uma função análoga àquela que tem o contar na adição. Como o "corredor de contar" ajuda na contagem, a tabela das tabuadas (página 20 do livro original alemão) pode ajudar na multiplicação. Vemos repetir, por exemplo, a tabuada do 6, primeiro na ordem, depois fora de ordem, verbalmente e por escrito.

3 x 6 = 18
2 x 6 = 12
6 x 6 = 36
4 x 6 = 24
5 x 6 = 30
2 x 6 = 12
7 x 6 = 42

Em seguida escrevemos todos os algarismos um ao lado do outro, e para todos juntos x 6, e escrevemos os resultados em baixo dos números fazendo finalmente a soma:

| | **3** | **2** | **6** | **4** | **5** | **2** | **7** | **x** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **8** | | | | | | | | |
| | **1** | **2** | | | | | | | |
| | | **3** | **6** | | | | | | |
| | | | **2** | **4** | | | | | |
| | | | | **3** | **0** | | | | |
| | | | | | **1** | **2** | | | |
| | | | | | | **4** | **2** | | |
| **1** | **9** | **5** | **8** | **7** | **1** | **6** | **2** | | |

Conseguimos o mesmo resultado escrevendo o numero 3264527 seis vezes, em colunas, e somando:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 2 | 7 |
| | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 2 | 7 |
| | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 2 | 7 |
| | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 2 | 7 |
| | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 2 | 7 |
| | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 2 | 7 |
| 1 | 9 | 5 | 8 | 7 | 1 | 6 | 2 |

Podemos também começar a multiplicação por traz:

| | **3** | **2** | **6** | **4** | **5** | **2** | **7** | **x** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | **4** | **2** | | |
| | | | | | **1** | **2** | | | |
| | | | | **3** | **0** | | | | |
| | | | **2** | **4** | | | | | |
| | | **3** | **6** | | | | | | |
| | **1** | **2** | | | | | | | |
| **1** | **8** | | | | | | | | |
| **1** | **9** | **5** | **8** | **7** | **1** | **6** | **2** | | |

O resultado é sempre o mesmo. Podemos também seguir uma ordem qualquer, por exemplo, multiplicar primeiro os números menores subindo depois para os maiores. Podemos nessa ocasião escrever vários produtos intermediários um ao lado do outro na mesma linha, sempre observando a ordem vertical correta:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 2 | 7 | x | 6 |
| | 1 | 2 | | | 1 | 2 | | | |
| 1 | 8 | | 2 | 4 | | | | | |
| | | 3 | 6 | 3 | 0 | 4 | 2 | | |
| 1 | 9 | 5 | 8 | 7 | 1 | 6 | 2 | | |

Na primeira linha em baixo do traço escrevemos os dois números 12 que resultam da multiplicação dos números 2 com 6; na linha seguinte 18 e 24 que resultam da multiplicação com 3 e 4; na terceira linha 30, 36 e 42 resultantes da multiplicação com 5, 6, e 7; No fim somamos todas as colunas. Com esse método, só há entre os dois traços 3 linhas quando antes eram 7. Se a gente multiplica cada segundo número, podemos reduzir a quantidade das linhas intermediárias para duas:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 2 | 7 | x | 6 |
| 1 | 8 | 3 | 6 | 3 | 0 | 4 | 2 | | |
| | 1 | 2 | 2 | 4 | 1 | 2 | | | |
| 1 | 9 | 5 | 8 | 7 | 1 | 6 | 2 | | |

Podemos também multiplicar todos os números em seguida, desde que o primeiro algarismo de cada produto intermediário é colocado em baixo para ceder o lugar ao próximo:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 2 | 6 | 4 | 5 | 2 | 7 | x | 6 |
| 1 | 8 | 2 | 6 | 4 | 0 | 2 | 2 | | |
| | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 4 | | | |
| 1 | 9 | 5 | 8 | 7 | 1 | 6 | 2 | | |

Como próximo passo, podemos por os algarismos 1 3 2 3 1 4, não em baixo, mas em cima:

```
  3 2 6 4 5 2 7 x 6
  1 3 2 3 1 4
1 8 2 6 4 0 2 2
1 9 5 8 7 1 6 2
```

E depois, em cima do traço e em tamanho menor. Finalmente, multiplicação e adição são efetuadas ao mesmo tempo:

```
  3 2 6 4 5 2 7 x 6
  1 3 2 3 1 4
1 9 5 8 7 1 6 2
```

No inicio da multiplicação escrita, recomenda-se ficar uma manhã inteira na multiplicação com números determinados, por exemplo, 6. Poderíamos começar com a recitação da tabuada de 6, para frente e para trás; começando num lugar qualquer ou escolhendo apenas os fatores impares, etc. Passa-se depois para a multiplicação escrita, sempre com 6. Na manhã seguinte, a mesma série de exercícios é feita para outro numero e só quando isso foi treinado várias vezes, é que passamos a multiplicação com vários números. Para uma série determinada, teremos, por exemplo:

```
3 2 6 4 5 2 7  X  6 = 1 9 5 8 7 1 6 2
3 2 6 4 5 2 7  X  7 = 2 2 8 5 1 6 8 9
3 2 6 4 5 2 7  X  8 = 2 6 1 1 6 2 1 6
3 2 6 4 5 2 7  X  9 = 2 9 3 8 0 7 4 3
```

Somando o numero inicial, cada resultado pode ser transformado no seguinte. Tais exercícios de "comprobação" reforçam a vivencia da harmonia matemática e das relações entre as várias operações.

Passando a multiplicação com números que possuem muitos algarismos, podemos começar assim:

```
3 2 6 4 5 2 7  x  6 7 8 9
```

Aproveitando os resultados já obtidos. Deslocamo-los de uma casa realmente no mesmo sentido dos algarismos 6 7 8 9. Isso pode ser feito de duas maneiras:

```
    3 2 4 5 2 7    x    6 7 8 9
  ---------------------------------
  1 9 5 8 7 1 6 2
    2 2 8 5 1 6 8 9
      2 6 1 1 6 2 1 6
        2 9 3 8 0 7 4 3
  ---------------------------------
  2 2 1 6 2 8 7 3 8 0 3
```

ou

```
        3 2 6 4 5 2 7    x    6 7 8 9
  ---------------------------------
        2 9 3 8 0 7 4 3
      2 6 1 1 6 2 1 6
    2 2 8 5 1 6 8 9
  1 9 5 8 7 1 6 2
  ---------------------------------
  2 2 1 6 2 8 7 3 8 0 3
```

Cada professor julgará melhor qual o "comprimento" das contas que pode exigir da sua classe. Queremos dizer, de maneira geral, que contas compridas, pela repetição rítmica do mesmo processo, oferecem uma vantagem metódica.

**Subtração:** Como introdução, podemos frisar que, contrariamente à adição, algumas contas são possíveis e outras não. Podem surgir as perguntas:

| **Subtração** | **Possível?** |
|---|---|
| 5 - 3 | sim |
| 6 - 7 | não |
| 8 - 5 | sim |
| 7 - 2 | sim |
| 3 - 6 | não |
| 5 - 5 | sim |
| 8 - 2 | sim |

Escrevendo o resultado cada vez que a conta é possível, temos:

| Subtração | Possível? | Resultado |
|---|---|---|
| 5 - 3 | sim | 2 |
| 6 - 7 | não | - |
| 8 - 5 | sim | 3 |
| 7 - 2 | sim | 5 |
| 3 - 6 | não | - |
| 5 - 5 | sim | 0 |
| 8 - 2 | sim | 6 |

Para podermos fazer uma conta mesmo lá, onde isso não é possível e onde, portanto, há um traço, tomamos em vez de: 6 – 7, agora 16 – 7, em vez de: 3 – 6: 13 – 6.
Neste caso, o exercício terá o aspecto seguinte:

| | | | Possível? | | Resultado |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Subtrair | 5 - 3 | sim | | 2 |
| 2. | Subtrair | 6 - 7 | não | Calculamos 16 - 7 | 9 |
| 3. | Subtrair | 8 - 5 | sim | | 3 |
| 4. | Subtrair | 7 - 2 | sim | | 5 |
| 5. | Subtrair | 3 - 6 | não | Calcularmos 13 - 6 | 7 |
| 6. | Subtrair | 5 - 5 | sim | | 0 |
| 7. | Subtrair | 8 - 2 | sim | | 6 |

ou ainda:

| | | Possibilidade Positiva | Possibilidade Negativa | |
|---|---|---|---|---|
| **Subtrair** | **Possível** | **Resultado** | **Calculamos** | **Resultado** |
| 5 - 3 | sim | 2 | - | - |
| 6 - 7 | não | - | 16 - 7 | 9 |
| 8 - 5 | sim | 3 | - | - |
| 7 - 2 | sim | 5 | - | - |
| 3 - 6 | não | - | 13 - 6 | 7 |
| 5 - 5 | sim | 0 | - | - |
| 8 - 2 | sim | 6 | - | - |

Podemos chegar a uma anotação ainda mais sucinta. A seguir, os números que devem ser subtraídos um do outro, são escritos um em baixo do outro. E em cima e em baixo dos dois números, fazemos um traço:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | | 1 | 3 | | |
| 5 | 6 | 8 | 7 | 3 | 5 | 8 |
| 3 | 7 | 5 | 2 | 6 | 5 | 2 |
| 2 | 9 | 3 | 5 | 7 | 0 | 6 |

As perguntas são formuladas como antes. Se a resposta quanto a possibilidade da subtração é positiva, o resultado é logo escrito em baixo, por exemplo, 5 – 3 = 2, 8 – 5 = 3, 7 – 2 = 5, 5 – 5 = 0 e 8 – 2 = 6. Mas se a resposta é negativa, calculamos em vez de 6 – 7, 16 – 7 = 9, e em vez de 3 – 6, 13 – 6 = 7. Escrevemos os números 16 e 13 em cima, e os resultados 9 e 7 em baixo.

Finalmente, subtraímos novamente as dezenas de 16 e 13, em suas respectivas colunas, ficando com isso conseguindo o resultado da subtração:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | | 1 | 3 | | |
| 5 | 6 | 8 | 7 | 3 | 5 | 8 |
| 3 | 7 | 5 | 2 | 6 | 5 | 2 |
| 2 | 9 | 3 | 5 | 7 | 0 | 6 |
| 1 | | | 1 | | | |
| 1 | 9 | 3 | 4 | 7 | 0 | 6 |

Dessa maneira, a subtração pode ser iniciada à esquerda ou à direita ou em qualquer ponto no meio. Evitamos dessa maneira o conceito do "emprestar" que é, aliás, problemático pelo fato que em todo empréstimo há uma devolução e que não se fala nisso na subtração.

Quando há problemas com muitos "não", torna-se às vezes necessário fazer duas linhas em cima do traço, mas nunca mais. Exemplo:

20000 – 138762:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 3 | 8 | 7 | 6 | 2 |
| 1 | 7 | 2 | 3 | 4 | 8 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | 6 | 1 | 2 | 3 | 8 |

Queremos apenas chamar a atenção para um caso especial. É o caso de se colocar um 11 em cima do traço. O "1" à direita é apenas a repetição de um "1" que já antes estava figurado no minueto enquanto o "1" à esquerda foi acrescentado. Por isso, só o "1" à esquerda deve ser substituído em sua coluna. Para evitar os "1" sem anel são repetidos em baixo e subtraídos. Exemplo: 729183 – 582967:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 |
| 7 | 2 | 9 | 1 | 8 | 3 |
| 5 | 8 | 2 | 9 | 6 | 7 |
| 2 | 4 | 7 | 2 | 2 | 6 |
| 1 | | 1 | | 1 | |
| 1 | 4 | 6 | 2 | 1 | 6 |

Essa maneira de efetuar-se a subtração não é considerada como a definitiva. É aquele grau intermediário onde ainda é possível realizar todas as subtrações parciais, uma independente das outras. Isso permite capacitar mesmo uma classe grande a executar extensas subtrações por escrito, de modo que o professor tem a possibilidade de mostrar a determinados alunos o método "combinado".

Como tal recomenda-se o chamado método "austríaco" que consiste em dizer o seguinte:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 9 | 2 | 6 |
| 2 | 7 | 5 | 4 |
| 3 | 1 | 7 | 2 |

4 e 2 são 6; 5 e 7 são 12, guardo 1; 1 + 7 são 8; 8 e 1 são 9, 2 e 3 são 5. Nesse modo, a subtração da dezena acrescentada se faz logo junto com o numero da sua coluna.

**Divisão:** Um dia, podemos retomar mais uma vez a prática das tabuadas, embora de maneira um pouco diferente. Por exemplo, a tabuada do 6. Primeiro repete-se a sequência toda, depois pega-se determinados números e finalmente se faz a pergunta: O 15 está na tabuada do 6? Não. E o 22? Não. E o 42? Sim. Em seguida o professor pergunta: qual é o numero da tabuada que precede o 15? Resposta: 12. Qual é o numero da tabuada do 6 antes do 38? Resposta 36. E qual é o numero antes do 22? Resposta: 18. Nova pergunta: De quanto 15 é maior que o numero da tabuada que o precede? Resposta 3. Mesma pergunta para 38. Resposta: 2. Mesma pergunta para 22. Resposta: 4. Próxima pergunta: quantas vezes 6 são os números da tabuada que encontramos? Resposta: 12 = 2 x 6; 36 = 6 x 6; 18 = 3 x 6; 42 = 7 x 6. Escrevemos agora todas as respostas numa tabela.

| **Número escolhido** | **Está na tabuada do 6?** | **Qual o nº da tabuada que pertence?** | **Qual a diferença?** | **Quantas vezes o 6 é o nº da tabuada?** |
|---|---|---|---|---|
| 15 | Não | 12 | 3 | 2 |
| 38 | Não | 36 | 2 | 6 |
| 22 | Não | 18 | 4 | 3 |
| 42 | Sim | 42 | 0 | 7 |

Passamos novamente para uma anotação combinada. Escrevemos na lousa 15822 e tomamos os dois primeiros números juntos: 15, e repetimos as perguntas:

| | |
|---|---|
| Número escolhido | 15 |
| Está na tabuada do 6? | Não |
| Qual é o número da tabuada que precede? | 12 |
| Qual a diferença? | 3 |
| Quantas vezes 6 é o numero da tabuada? | 2 |

Anotamos as respostas de tal maneira que escrevemos o 12 em baixo do 15, fazendo em baixo um traço e em baixo deste, escrevemos o 3. O ultimo número 2, anotamo-lo à direita:

1 5 8 2 2 2

1 2

3

Agora abaixamos o 8 e reunimo-lo com o 3, obtendo 38. Continuamos então as perguntas:

| | |
|---|---|
| Número escolhido | 38 |
| Na tabuada do 6? | não |
| Qual é o número da tabuada que precede? | 36 |
| Qual é a diferença? | 2 |
| Quantas vezes 6 é o numero da tabuada? | 6 |

Anotamos as respostas novamente de maneira a colocar o 36 em baixo do 38; depois vem o traço, depois o 2. O ultimo número "6", escrevemo-lo novamente à direita:

1 5 8 2 2 2 6

1 2

3 8

3 6

2

Depois abaixamos o número seguinte, obtendo 22 e continuamos:

| | |
|---|---|
| Número escolhido | 22 |
| Está na tabuada do 6? | não |
| Número precedente? | 18 |
| Diferença? | 4 |
| Quantas vezes 6? | 3 |

Temos então:

```
1 5 8 2 2          2 6 3
1 2
-------
  3 8
  3 6
-------
    2 2
    1 8
-------
      4
```

Mais uma vez baixamos o número seguinte e temos:

| | |
|---|---|
| Número escolhido | 42 |
| Está na tabuada do 6? | sim |
| Número precedente? | 42 |
| Diferença? | 0 |
| Quantas vezes 6? | 7 |

Anotamos a respeito como antes; depois o traço e depois o 0. Anotamos novamente o 7 à direita. Finalmente notamos que calculamos com a tabuada do 6. O cálculo total será este:

```
1 5 8 2 2 : 6 = 2 6 3 7
1 2
-------
  3 8
  3 6
-------
    2 2
    1 8
-------
      4 2
      4 2
-------
        0
```

Multiplicando 2637 x 6, encontramos novamente 15822.

Pelo caminho exposto, percorremos três vezes as mesmas operações: a primeira vez como conta oral, depois usando a tabela, e a terceira vez com anotação reduzida da divisão. A repetição, mais do que muitas explicações, despertam a atividade dos alunos. Comentários adicionais podem ser acrescentados em várias ocasiões.

Ao fazer a divisão por números de mais de um algarismo, surge como novidade a necessidade de estimar quantas vezes um número é contido em outro. Por esse motivo, antes de efetuarem-se tais divisões, convém antecipar exercícios apropriados, perguntando:

Quantas vezes 25 é contido em 109? Resposta: 25 x 4 = 100, enquanto já 25 x 5 = 125 seria grande demais. Quantas vezes 25 é contido em 92? Resposta: 3 vezes. 25 x 3 = 75, enquanto 25 x 4 = 100, seria grande demais. Quantas vezes 25 são 175? Resposta: exatamente 7 vezes; 25 x 7 = 175. No 25, o resultado é facilmente discernível porque seus múltiplos se repetem sempre em 25, 50, 75 e 100.

Passa-se agora a cálculos onde a relação não aparece tão nitidamente, por exemplo. Quantas vezes 43 é contido em 342? Muitos pensarão 8 vezes, mas 43 x 8 = 344, portanto já é grande demais. Haverá uma competição alegre de estimação; finalmente, os resultados corretos são novamente anotados em forma de tabela:

| **Número escolhido** | **Múltiplo de 25 que precede** | **Diferença** | **Quantas vezes 25?** |
|---|---|---|---|
| 109 | 100 | 9 | 4 |
| 92 | 75 | 17 | 3 |
| 175 | 175 | 0 | 7 |

E agora em anotação reduzida:

```
1 0 9 2 5 : 2 5 = 4 3 7
1 0 0
-------
  9 2
  7 5
  1 7 5
  1 7 5
-------
      0
```

Novamente 437 x 25 = 10925, nos faz voltar ao ponto de partida. Recomendamos aplicar o método ainda mais reduzido em que a multiplicação e a subtração são combinadas, somente bem mais tarde quando o caminho da anotação mais demorada já tiver sido praticado bastante. Um encurtamento de uma anotação implica sempre numa atividade mental mais intensa, e esta constitui uma exigência mais para intelecto cujo grau de desenvolvimento em cada individuo deve ser sempre levado em conta.

## SOBRE AS OPERAÇÕES ARMADAS

Para a prática das operações por escrito, é necessário de um lado, transformá-las num patrimônio duradouro seguramente adquirido pelo aluno, evitando, de outro lado, que se caia numa rotina rígida ou que o ensino se torna enfadonho. Temos de evitar exemplos cujos resultados não tenham para o aluno nenhum interesse. Para tal, não é necessário buscar os exemplos apenas nas aplicações práticas: podemos ficar no domínio dos números puros.

Podemos, por exemplo, dirigir-nos às crianças nos seguintes termos: "Que dia lindo hoje! Vocês vieram para a escola, mas será que em suas cabeças existe tanta luz e clareza como no ar? Vocês estão bem descansados e dispostos. Vamos logo: E o professor começa com a adição seguinte:

$$\begin{array}{r} 12 \\ 23 \\ \quad 7 \\ 31 \\ 18 \\ \quad 9 \\ \hline 100 \end{array}$$

Algumas crianças logo anunciarão que o resultado é 100, e outras irão confirmá-lo. Agora mais duas contas de somar:

$$\begin{array}{r} 15 \\ 20 \\ \quad 2 \\ 11 \\ 32 \\ 20 \\ \hline 1001 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ 17 \\ 26 \\ \quad 5 \\ 20 \\ 21 \\ \hline 100 \end{array}$$

Para grande alegria das crianças, o resultado novamente é 100. Existe então a tentação de adivinhar em vez de calcular e o professor prevenido dará o exemplo seguinte:

$$\begin{array}{r} 1\ 9 \\ 2\ 0 \\ 2\ 4 \\ \quad 7 \\ 1\ 5 \\ 2\ 6 \\ \hline 1\ 1\ 1 \end{array}$$

Agora já é maior a expectativa de qual vai ser o resultado das contas seguintes. Seguem-se então três somas de 4 números com três algarismos:

$$\begin{array}{r} 2\ 5\ 1 \\ 3\ 2\ 4 \\ 4\ 1\ 7 \\ 1\ 1\ 9 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ 8\ 5 \\ 8\ 2\ 3 \\ 1\ 4\ 9 \\ 4\ 6\ 5 \\ \hline 2\ 2\ 2\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\ 5\ 8 \\ 7\ 4\ 5 \\ 8\ 3\ 6 \\ 7\ 9\ 4 \\ \hline 3\ 3\ 3\ 3 \end{array}$$

Ante que isso novamente se torna monótono, podemos dar os seguintes cálculos:

$$\begin{array}{r} 8\ 9\ 6 \\ 7\ 8\ 4 \\ 9\ 8\ 3 \\ 7\ 7\ 1 \\ \hline 3\ 4\ 3\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\ 7\ 6 \\ 8\ 8\ 7 \\ 7\ 9\ 3 \\ 8\ 7\ 9 \\ \hline 3\ 5\ 3\ 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3\ 8\ 4 \\ 5\ 6\ 2 \\ 2\ 1\ 7 \\ 4\ 5\ 3 \\ \hline 1\ 6\ 1\ 6 \end{array}$$

Ou:

| | | |
|---|---|---|
| 1 5 4 | 4 3 1 | 8 7 9 |
| 2 3 7 | 6 2 4 | 7 4 2 |
| 3 8 1 | 2 5 6 3 | 5 0 8 |
| 4 6 2 | 7 0 3 | 3 3 9 |
| 1 2 3 4 | 4 3 2 1 | 2 4 6 8 |

, etc.

Os alunos certamente vão perguntar "como a gente faz para que haja tais resultados." O professor lhes mostra que, por exemplo, no caso da soma de 4 números de 3 algarismos cada, a gente imagina primeiro o resultado ao qual se quer chegar e escolhe depois os três primeiros números de maneira que sua soma seja inferior ao resultado escolhido. Em seguida, deve-se subtrair essa soma do resultado pré-fixado, e a diferença será o quarto número! Se, por exemplo, o resultado fixado for 1 2 3 4 e os primeiro números

1 5 4
2 3 7
3 8 1

cuja soma 772 é aceitável, então se obtemos para o quarto números ... 1234 – 772 = 462. Em geral, os alunos tomam então a iniciativa e querem compor tais exemplo. O professor pode facilmente conseguir que no dia seguinte, os alunos tragam tantos exemplos que há matéria suficiente para uma semana de exercícios. Com isso respondemos à objeção de que certamente é interessante para a classe lidar com tais resultados preparados, mas que isso é pouco econômico ( para o professor) devido ao tempo para os primeiros exercícios será largamente compensado pelas contribuições dos alunos.

Para a multiplicação podemos utilizar, entre outros, os seguintes exercícios:

37 x 3 = 111
37 x 6 = 222
37 x 9 = 333
37 x 12 = 444
37 x 15 = 555
37 x 18 = 666
37 x 21 = 777
37 x 24 = 888
37 x 27 = 999

ou, de forma ampliada:

37037 x 3 = 111 111
37037 x 6 = 222 222
37037 x 9 = 333 333

37037037 x 3 111 111 111
37037037 x 6 222 222 222
37037037 x 9 333 333 333

Outra sequência seria;

123456789 x 9 = 111 111 111
123456789 x 18 = 222 222 222
123456789 x 27 = 333 333 333
123456789 x 36 = 444 444 444
123456789 x 45 = 555 555 555
123456789 x 54 = 666 666 666
123456789 x 63 = 777 777 777
123456789 x 72 = 888 888 888
123456789 x 81 = 999 999 999

Onde falta cada vez o nº 8 da primeira sequência.

A resposta quanto ao "porque" desse fato resulta da seguinte divisão cujos dividendos intermediários são: 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81:

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 : 9 = 1 2 3 4 5 6 7 9
  9
  ---
  2 1
  1 8
  ---
    3 1
    2 7
    ---
      4 1
      3 6
      ---
        5 1
        4 5
        ---
          6 1
          5 4
          ---
            7 1
            6 3
            ---
              8 1
              8 1
              ---
                0
```

Quando se nota quantas vezes o 9 é contido nos dividendos parciais e quais os restos, o resultado é:

| Dividendos parciais | 11 | 21 | 31 | 41 | 51 | 61 | 71 | 81 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Quantas vezes 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 |
| Restos | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 |

Tanto o número dos 9 contidos como o dos restos aumentam de 1 até 71. Para 81 teríamos então

| Quantas vezes 9 | 8 |
|---|---|
| Resto | 9 |

O resto, portanto, alcançou 9 e é esse motivo que o número dos 9 contidos aumenta de 8 para 9, e o resto passa a ser 0.

Os exemplos das multiplicações de 1 2 3 4 5 6 7 9 podem também ser tratados de tal maneira que o professor pede aos alunos escolher um dos números entre 1 e 9. Se o número escolhido dor 4, a multiplicação de 1 2 3 4 5 6 7 9 será feita com 36 ( número escolhido é 0 4, multiplicado por 9), e o resultado será:

```
  1 2 3 4 5 6 7 9 x 3 6
  ---------------------
  7 4 0 7 4 0 7 4
3 7 0 3 7 0 3 7
---------------
4 4 4 4 4 4 4 4 4
```

Essa série permite as seguintes contas:

1122334455667789 X 9 = 10101010101010101

1122334455667789 X 18 = 20202020202020202

Como se vê os números de 1 a 7 figuram em pares, o 8 e o 9 só uma vez, o que resulta por sua vez da divisão:

10101010101010101 : 9 = 1122334455667789

Uma ampliação disso conduz a:

111222333444555666777888 9 x 9 = 100100100100100100100100 1

111222333444555666777888 9 x 18 = 200200200200200200200200 2

Recomenda-se ter tais exercícios mais demorados prontos para os alunos que trabalham mais rapidamente e que gostam de ter um osso mais duro para roer, enquanto os outros ainda estão atarefados com o problema anterior.

Existem multiplicações com pequenas adições complementares

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | 9 | + | 2 | = | | | | | 11 |
| 12 | x | 9 | + | 3 | = | | | | | 111 |
| 123 | x | 9 | + | 4 | = | | | | | 1111 |
| 1234 | x | 9 | + | 5 | = | | | | | 11111 |
| 12345 | x | 9 | + | 6 | = | | | | | 111111 |
| 123456 | x | 9 | + | 7 | = | | | | | 1111111 |
| 1234567 | x | 9 | + | 8 | = | | | | | 11111111 |
| 12345678 | x | 9 | + | 9 | = | | | | | 111111111 |
| 123456789 | x | 9 | + | 10 | = | | | | | 1111111111 |
| 1234567890 x 9 + 10 | x | 9 | + | 11 | = | | | | | 11111111111 |
| 12345678900 x 9 + 10 x 10 | x | 9 | + | 11 | x | 9 + 12 = | | | | 111111111111 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | x | 8 | + | 1 | = | 9 |
| 12 | x | 8 | + | 2 | = | 98 |
| 123 | x | 8 | + | 3 | = | 987 |
| 1234 | x | 8 | + | 4 | = | 9876 |
| 1245 | x | 8 | + | 5 | = | 98765 |
| 123456 | x | 8 | + | 6 | = | 987654 |
| 1234567 | x | 8 | + | 7 | = | 9876543 |
| 12345678 | x | 8 | + | 8 | = | 98765432 |
| 123456789 | x | 8 | + | 9 | = | 987654321 |
| 1234567890 x 8 + 10 | x | 8 | + | 10 | = | 9876543210 |

Para a adição e a subtração, pode-se recorrer ao seguinte exercício: Escolher um número qualquer de 3 algarismos em que o primeiro e o terceiro algarismos sejam diferentes. Inverter os números, o que dá um segundo número de 3 algarismos. Subtrair o número menor do maior. Inverter novamente o resultado, obtendo assim um terceiro número. Somar o segundo e o terceiro número. Por exemplo:

| | | |
|---|---|---|
| Número escolhido | 752 | |
| Inverter | 257 | - |
| Subtraindo, temos | 495 | |
| Inverter | 594 | + |
| Somando, temos | 1089 | |

O resultado é sempre 1089, qualquer que seja o número inicial. *

Antes de praticar a divisão, voltamos mais uma vez às tabuadas, ampliando o que se foi previamente aprendido. Continuando, por exemplo, a tabuada do 3 até 150, temos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 33 | 63 | 93 | 123 |
| 6 | 36 | 66 | 96 | 126 |
| 9 | 39 | 69 | 99 | 129 |
| 12 | 42 | 72 | 102 | 132 |
| 15 | 45 | 75 | 105 | 135 |
| 18 | 48 | 78 | 108 | 138 |
| 21 | 51 | 81 | 111 | 141 |
| 24 | 54 | 84 | 114 | 144 |
| 27 | 57 | 87 | 117 | 147 |
| 30 | 60 | 90 | 120 | 150 |

* A demonstração se faz pela álgebra:

número escolhido a. 100 + b. 10 + c.

Inverter c. 100 + b. 10 + a.

Transformação para subtração:

(a-1) . 100 + (9 + b). 10 + 10 + c

c. 100 + b. 10 + a

Diferença ( a-c-1) . 100 + 9. 10 + 10 + c

Inverter (10-c-a). 100 + 9. 10 + (a-c-1)

Soma 9. 100 + 18. 10 + 9 = 1089

Em todas as colunas, repete-se a sequência das unidades:

3 6 9 2 5 8 1 4 7 0

Se (sempre na tabuada do 3) já gente soma os algarismos de todos os números, e numa segunda operação, as somas dos algarismos de todos os números, até ficar apenas um algarismo, o quadro é o seguinte:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | | 33 | 3+3=6 | | 63 | 6+3=9 | |
| 6 | | 36 | 3+6=9 | | 66 | 6+6=12 | 1+2=3 |
| 9 | | 39 | 3+9=12 | 1+2=3 | 69 | 6+9=15 | 1+5=6 |
| 12 | 1+2=3 | 42 | 4+2=6 | | 72 | 7+2=9 | |
| 15 | 1+5=6 | 45 | 4+5=9 | | 75 | 7+5=12 | 1+2=3 |
| 18 | 1+8=9 | 48 | 4+8=12 | 1+2=3 | 78 | 7+8=15 | 1+5=6 |
| 21 | 2+1=3 | 51 | 5+1=6 | | 81 | 8+1=9 | |
| 24 | 2+4=6 | 54 | 5+4=9 | | 84 | 8+4=12 | 1+2=3 |
| 27 | 2+7=9 | 57 | 5+7=12 | 1+2=3 | 87 | 8+7=15 | 1+5=6 |
| 30 | 3+0=3 | 60 | 6+0=6 | | 90 | 9+0=9 | |

Nas ultimas somas de algarismos, temos sempre a repetição da sequência 3, 6, 9. Isso é válido, seja qual for o ponto o qual se continua a tabuada do 3. Por exemplo, temos para os números entre 570 e 612:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 570 | 5 | + | 7 | + | 0 | = | 12 | | 1 | + | 2 | = | 3 |
| 573 | 5 | + | 7 | + | 3 | = | 15 | | 1 | + | 5 | = | 6 |
| 576 | 5 | + | 7 | + | 6 | = | 18 | | 1 | + | 8 | = | 9 |
| 579 | 5 | + | 7 | + | 9 | = | 21 | | 1 | + | 2 | = | 9 |
| 582 | 5 | + | 8 | + | 2 | = | 15 | | 1 | + | 5 | = | 6 |
| 585 | 5 | + | 8 | + | 5 | = | 18 | | 1 | + | 8 | = | 9 |
| 588 | 5 | + | 8 | + | 8 | = | 21 | | 2 | + | 1 | = | 3 |
| 591 | 5 | + | 9 | + | 1 | = | 15 | | 1 | + | 5 | = | 6 |
| 594 | 5 | + | 9 | + | 4 | = | 18 | | 1 | + | 8 | = | 9 |
| 597 | 5 | + | 9 | + | 7 | = | 21 | | 2 | + | 1 | = | 3 |
| 600 | 6 | + | 0 | + | 0 | = | 6 | | | | | = | 6 |
| 603 | 6 | + | 0 | + | 3 | = | 9 | | | | | = | 9 |
| 606 | 6 | + | 0 | + | 6 | = | 12 | | 1 | + | 2 | = | 3 |
| 609 | 6 | + | 0 | + | 9 | = | 15 | | 1 | + | 5 | = | 6 |
| 612 | 6 | + | 1 | + | 2 | = | 9 | | | | | = | 9 |

Essa propriedade proporciona o meio de verificar a qualquer momento se o número figura na série (tabuada) do 3. Tal será o caso se a soma final dos algarismos for 3 ou 6 ou 9. Nesse caso, o número é divisível por 3. Por exemplo, o número 523440 dá, com ultima soma dos algarismos, 9. 523440 : 3 = 174480, sem resto. Ao contrário o número 472582 tem, como soma dos seus algarismos, 28, sendo portanto a ultima soma = 1. Dividindo 472582 : 3 = 157527, com o resto de 1. Quanto a essa propriedade da tabuada do 3, podemos ainda tecer a seguinte observação:

Cada vez que os números da série de 3 passam para uma dezena superior, a soma dos algarismos é aumentada em 1, por esse aumento da dezena. Em compensação, a casa das unidades diminui de 9 para 2, de 8 para 1, ou de 7 para 0, sendo esta ultima diferença sempre 7. Com cada passagem de uma dezena para outra, a soma dos algarismos diminui em 6. Dentro da mesma dezena, ela sobe, com o aumento das unidades, 2 vezes de 3, permanecendo, pois 3 6 9. Na passagem de uma centena para outra, por exemplo, de 99 para 102, há aumento de uma centena, eliminação de 9 dezenas e diminuição de 7 casas das unidades: a diminuição total da soma dos algarismos é, pois, de 9 + 7 – 1 = 15, e a soma dos algarismos desta diminuição 1 + 5 = 6.

Na série dos 9, a formação das somas dos algarismos, das somas destas somas, etc. não dá a repetição de uma sequência de algarismos, mas sempre o mesmo algarismo: 9.

| | | |
|---|---|---|
| 9 | | 9 |
| 18 | | 1+8=9 |
| 27 | | 2+7=9 |
| 36 | | 3+6=9 |
| 45 | | 4+5=9 |
| 54 | | 5+4=9 |
| 63 | | 6+3=9 |
| 72 | | 7+2=9 |
| 81 | | 8+1=9 |
| 90 | | 9+0=9 |
| 99 | 9+9=18 | 1+8=9 |
| 108 | | 1+0+8=9 |
| 117 | | 1+1+7=9 |
| 126 | | 1+2+6=9 |

Isso continua enquanto continuar da série de 9. Na passagem das dezenas e centenas, poderíamos fazer observações analógicas àquelas que se aplicam à série do 3. A divisibilidade de qualquer número, por 9, pode, portanto ser facilmente reconhecida.

Em muitas séries encontramos, pois, sequências de números que se repetem ritmicamente nas unidades e na soma dos algarismos; é muito interessante investigá-las. Quando tais sequências são particularmente simples, podem ser aproveitadas para regras de divisibilidade.

Um número é divisível por 2, ele é, portanto, par, quando o algarismo das unidades é divisível por 2.

Uma divisão por 4 se efetua, sem resto se o número formado pelas dezenas e pelas unidades é divisível por 4, pois todas as centenas, milhares são " a priori" divisíveis por 4. 536 é divisível por 4, porque 36 o é, 834 não é divisível por 4 porque 34 não é. No caso de uma divisão por 8, a divisibilidade depende de conjunto das centenas, dezenas e unidades, pois os milhares, dezenas de milhares, etc. são de antemão divisíveis por 8. 5848 é divisível por 8 porque 848 o é, 8188 não pode ser divisível por 8 porque 188 não é divisível por 8. Um número é divisível por 5 quando a unidade é 5 ou 0. Com efeito, todos esses números figuram na série 5.

Quanto à divisão por 11, o sinal de divisibilidade decorre de uma extensão da seguinte propriedade de todos os números da série 11, a diferença das dezenas e unidades é unicamente 0. Se, num número comprido, a gente soma os 1., 3., 5., 7... algarismos e os 2., 4., 6., 8.... algarismos respectivamente e se a diferença das duas somas é 0 ou um múltiplo de 11, então o número inicial é divisível por 11. Para o numero

4 7 8 2 3 4 8 9 1 1 4 5

a soma dos 1., 3., 5.,... algarismos é 28

e a soma dos 2., 4., 6.,... algarismos é 28

diferença 0

A diferença é o 0, o número é divisível por 11. Para o número... 8 4 7 1 6 1 9 2, as somas são 2 + 1 + 1 + 4 = 8 e 9 + 6 + 7 + 8 = 30. Sua diferença entre dezenas e unidades é novamente 0; o número 8 4 7 1 6 1 9 2 pode, portanto ser dividido por 11 sem resto.

Um número é divisível por 6 quando é divisível por 2 e 3; por 12 quando é divisível por 4 e 3; por 15 quando é divisível por 5 e 3, por 18 quando por 2 e 9, etc.

Se os alunos perguntassem a respeito da divisibilidade por 7, o professor lhes mostrará os critérios, embora sejam complicados de modo que é, às vezes, mais rápido efetuar a divisão por 7. O método consiste em dividir o número em grupos de 3 algarismos,

começando pelo fim. Depois somamos os 1, 3, 5, ... grupos e os 2, 4, 6, ... grupos. Se a diferença das duas somas é divisível por 7, o numero inicial também o é. Para o número 1 4 3 4 9 3 5 6 2 3 5 1 4 2, a divisão em grupos dá 14 349 356 235 142. A soma dos 1., 3., 5., grupos é

$$\begin{array}{r} 142 \\ 356 \\ 14 \\ \hline 512 \end{array} \quad +$$

e a dos 2. e 4. grupos

$$\left.\begin{array}{r} 235 \\ 349 \end{array}\right\} \quad + \qquad \begin{array}{r} \\ 584 \end{array}$$

A diferença 584 – 512 = 72 não é um múltiplo de 7, o número dado não pode, portanto, ser dividido por 7.

Com isso, as regras de divisibilidade são completas até 12. Se acrescentarmos as possibilidades proporcionadas pela decomposição em fatores, temos á nossa disposição um grande campo de investigação e muita matéria para se exercitar a divisão.

## FRAÇÕES

Para fazer jus ao campo das frações, recomenda-se abordá-lo não só por um caminho, aquele da divisão, mas por três vias: tudo do todo

1) Podemos chegar do todo à parte dividindo uma folha de papel primeiro em 2, depois em 4, 8, etc. partes; ou dividindo um círculo, etc. Se a divisão for feita em 4 partes, cada parte é chamada um quarto, por escrito: $\frac{1}{4}$. Se dividimos em 5 partes, cada parte é chamada de um quinto, escrevendo $\frac{1}{5}$. Dividindo em 3, cada parte é chamada $\frac{1}{3}$, mas quando dividimos em 2, cada parte é um meio ou uma metade. Para 3 vezes um quarto escrevemos 3 x $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$. O 3 dá o número das partes, por isso ele se chama numerador, o 4 denomina as partes em que se dividiu e chama-se denominador. O professor partirá de várias possibilidades de dividir, por exemplo, repartir uma torta de aniversário, distribuir presentes, cortar uma maça ou dividir algo que várias pessoas adquiriram em comum.

2) O caminho contrário, da parte para o todo, poderia ser iniciado da seguinte maneira: Perguntamos a uma criança quantos irmãos e irmãs são em sua casa. Se ele responde: 2 irmãos e 1 irmã, eles são 3, mas nem sempre todos estão em casa. Quando um está em casa, é apenas 1 de 3, ou seja, um terço dos irmãos; a gente escreve novamente $\frac{1}{3}$. Depois dos três são 2 x $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$. Com os pais, a família tem 5 membros. Quando todos estão juntos, são 5, mas uma criança sozinha é apenas 1 de 5, um equilíbrio da família: $\frac{1}{5}$. Dois filhos são 2x $\frac{1}{5}$ ou $\frac{2}{5}$.

Uma criança faz parte de uma classe que contém 30 alunos. Quando está só na classe, é apenas um trigésimo da classe: $\frac{1}{30}$. A criança faz também parte da escola. Seja 535 o número de alunos desta. Ela é então uma de 535, um quinhentésimo trigésimo quinto, $\frac{1}{535}$. É também $\frac{1}{558}$ dos alunos e professores em conjunto, e $\frac{1}{565}$ de todas as pessoas que pertencem à escola: alunos, professores, zelador, empregados de escritório, etc. A mesma criança seria também $\frac{1}{200.000}$ da

população de uma cidade, ou uma fração tendo um denominador ainda maior quando se pensa na população do país, ou até $\frac{1}{3.500.000.000}$ da população total da terra.

Para contar com o tempo: uma hora é $\frac{1}{24}$ de um dia, um dia $\frac{1}{7}$ da semana, uma semana $\frac{1}{52}$ do ano, e um ano talvez, $\frac{1}{80}$ de uma vida. Mas um dia pode ser estragado se se perde uma hora. Uma vida pode ser salva num minuto. Um livro é sem valor se lhe falta uma única folha, um baralho quando se está perdida uma única carta. De acordo com os moldes do raciocínio atual, a tendência é de partir do todo para a divisão. (*)

Troca-se a parte defeituosa de uma máquina; fazemos o diagnóstico para constatar qual o órgão prejudicado, procuramos determinar quem é o responsável num desastre; a ciência tende a explicar os fenômenos da natureza por meio de moléculas e átomos. À guisa de compensação, recomendamos cultivar a segunda maneira de raciocinar.

3) O terceiro modo de se introduzir as frações corresponde às comparações, isto é, à maneira mais frequente de se chegar a uma fração. Uma árvore de 12 metros de altura não consiste de 12 pedaços de 1m, mas ela é 12 vezes mais comprida do que um metro; ou vice-versa, o metro é um doze avos de altura da árvore. Na figura seguinte (25) são desenhadas duas árvores, uma maior, outra menor. Cada uma é uma árvore inteira; a primeira é 3 vezes mais alta que a segunda, a segunda mede $\frac{1}{3}$ da primeira.

Fig. 25

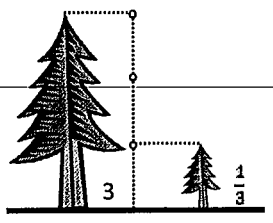
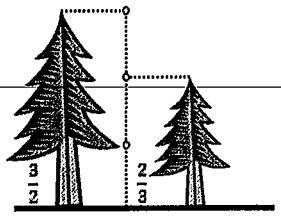



Fig. 26




***NT: Assim formulada essa afirmação me parece discutível, pois atualmente se quer sempre explicar o todo pelas partes elementos: O corpo é a soma das suas células, o átomo é a soma das prótons e elétrons, a coletividade dos indivíduos ( que são considerados iguais).**

Se a árvore maior fosse 4 vezes mais alta que a menor, esta teria $\frac{1}{4}$ da altura da outra. A transformação a comparação efetua a transição de um número inteiro para uma fração. Na figura 26, encontramos novamente uma árvore maior e outra menor. O que é a segunda em relação à maior? Resposta: $\frac{2}{3}$. Na figura 27, a altura da árvore maior é superior de um terço àquela da árvore menor. Ela é, portanto $1\frac{1}{3}$ ou $\frac{4}{3}$ da menor, e esta e esta é $\frac{3}{4}$ da mais alta. *

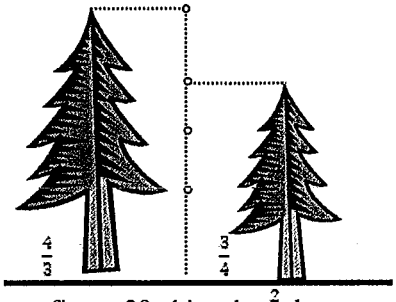



**Fig. 27**

Se uma das duas árvores, figura 28, é igual a $\frac{2}{4}$ da outra, ela é tão alta como se a sua altura fosse $\frac{1}{2}$ da altura da outra.

Se numa família há 4 irmãos, dois que estão juntos, representam $\frac{2}{4}$ dos irmãos. Mas isso é também $\frac{1}{2}$ dos irmãos. As duas expressões significam o mesmo. Quando se divide um círculo, $\frac{2}{4}$ são iguais a $\frac{1}{2}$.

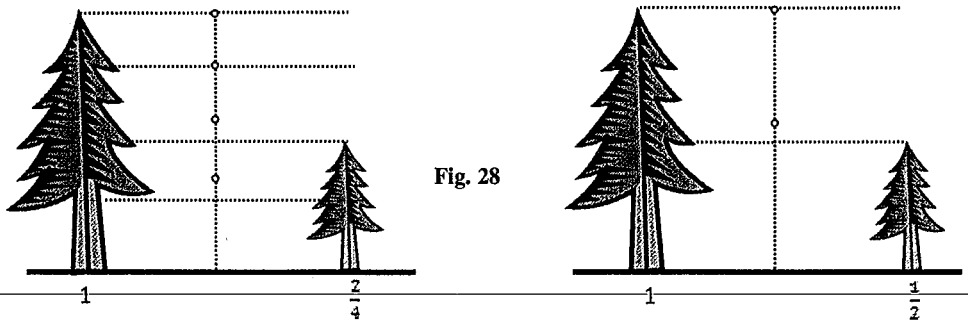



**Fig. 28**

*** N.T: Acho que essas figuras e a terminologia empregada pelo autor, podem criar na mente das crianças muita confusão. Por exemplo, escrever na mesma figura 25, 3 e $\frac{3}{3}$, significa, para as crianças que aprenderam as frações por outro caminho, que se trata de 3 inteiros de um terço de um inteiro. Nesse caso a relação de tamanho seria 9: 1; ora na figura 25, ela é apenas 3: 1. A meu ver, o exemplo das árvores é bom, mas se a maior for designada por 3, a menor deveria ser 1; e se a menor for designada por $\frac{1}{3}$ a maior deveria ser 1. Recomenda-se muita atenção a esse respeito!!**

De dois números inteiros diferentes entre si, um é sempre maior e o outro, menor. Mas com frações, duas que se escrevem de maneira diferente, podem ser iguais:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16} = \frac{16}{32} \quad \ldots \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \frac{7}{14} = \frac{33}{66} \quad \ldots$$

Se numa fração, o número superior (numerador) cresce, a fração também cresce. Mas se o número inferior (denominador) cresce, a fração decresce. Se duplicarmos o denominador por dois, a fração fica reduzida à metade. Se os dois, numerador e denominador, são multiplicados por dois, a fração é ao mesmo tempo duas vezes maior e duas vezes menor; quer dizer que fica a mesma.

A mesma fração pode, pois, ser escrita com números maiores e menores. Mas como queremos escrever as frações da maneira mais simples e rápida temos que procurar escrever as frações da maneira mais curta. Em vez de $\frac{2}{4}$ preferimos escrever $\frac{1}{2}$, em vez de:

$$\frac{16}{32} = \frac{8\times2}{16\times2} = \frac{8}{16} \qquad \frac{4}{8} = \frac{2\times2}{4\times2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{8}{16} = \frac{4\times2}{8\times2} = \frac{4}{8} \qquad \frac{2}{4} = \frac{1\times2}{2\times2} = \frac{1}{2}$$

Aí chegamos aos números mais simples. Muito nos ajuda reconhecer a divisibilidade. A fração:

$$\frac{142560}{199584}$$

Tem em cima e em baixo números pares. Os dois contém, pois, o fator 2, e podemos escrever:

$$\frac{142560}{159584} = \frac{71280\times2}{99792\times2} = \frac{71280}{99792}$$

Novamente temos em cima e em baixos números pares. Portanto podemos novamente dividir por 2 e obtemos:

$$\frac{71280}{99792} = \frac{35640\times2}{49896\times2} = \frac{35640}{49896}$$

Podemos fazer isso mais 3 vezes:

$$\frac{35640}{49896} = \frac{17820 \times 2}{24948 \times 2} = \frac{17820}{24948}$$

$$\frac{17820}{24948} = \frac{8910 \times 2}{12474 \times 2} = \frac{8910}{12474}$$

$$\frac{8910}{12474} = \frac{4455 \times 2}{6237 \times 2} = \frac{4455}{6237}$$

Agora, os dois números são ímpares e não podem mais ser divididos por 2; mas podem sê-lo por 3:

$$\frac{4455}{6237} = \frac{1485 \times 3}{2079 \times 3} = \frac{1485}{2079}$$

Pois tal como podemos "simplificar" uma fração por 2, isso também é possível com outros números, como 3, 5, 7, 11,... desde que numerador e denominador são divisíveis pelo mesmo número.

Podemos dividir em cima e em baixo mais três vezes por 3:

$$\frac{1485}{2079} = \frac{495 \times 3}{693 \times 3} = \frac{165}{693}$$

$$\frac{165}{693} = \frac{165 \times 3}{231 \times 3} = \frac{165}{231}$$

$$\frac{165}{231} = \frac{55 \times 3}{77 \times 3} = \frac{55}{77}$$

Os números 55 e 77 constam ambos na tabuada do 11. Podemos, portanto, dividir por 11 e obtemos:

$$\frac{55}{77} = \frac{5 \times 11}{7 \times 11} = \frac{5}{7}$$

Conseguimos, portanto reduzir por meio de uma sequência de divisões a fração comprida a uma fração muito curta:

$$\frac{142560}{199584} = \frac{5}{7}$$

Um caminho mais rápido para a simplificação consiste em decompor numerador e denominador em números primos (fatores primos). Para tal, numerador e denominador são escritos em separado e ao lado de ambos, se faz um traço vertical. À direita deste traço são anotados os fatores primos contidos nos números, começando pelos menores, cada um tantas vezes quantas ocorrer. Sob os números originais escrevemos os quocientes obtidos depois da divisão pelos fatores primos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 142560 | 2 | 199584 | 2 |
| 71280 | 2 | 99792 | 2 |
| 35640 | 2 | 49896 | 2 |
| 17820 | 2 | 24948 | 2 |
| 8910 | 2 | 12474 | 2 |
| 4455 | 3 | 6237 | 3 |
| 1485 | 3 | 2079 | 3 |
| 495 | 3 | 693 | 3 |
| 165 | 3 | 231 | 3 |
| 55 | 5 | 77 | 7 |
| 11 | 11 | 11 | 11 |

Anotando, a decomposição em números primos sob forma de fração temos:

$$\frac{2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times3\times3\times5\times11}{2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times3\times3\times7\times11} = \frac{5}{7}$$

Cada vez que o mesmo fator aparece em cima e em baixo do traço, podemos simplificar.

Como na fração precedente, o fator 2 ocorre cinco vezes, o fator 3 vezes e o fator 11 uma vez, todos esses fatores podem ser riscados. Resta, pois, de toda a longa fração, a expressão $\frac{5}{7}$.*

***N.T: Este método é o do M. D. C. = Máximo Divisor Comum.**

Para a simplificação das frações existe ainda um terceiro caminho. Escreve-se, lado a lado, o numerador e o denominador. O numero maior é dividido pelo menor. O resto é escrito em baixo do dividendo. Em seguida, o número menor é dividido pelo resto e o novo resto, isto é, o segundo resto, é novamente escrito em baixo do dividendo. Divide-se então o primeiro resto pelo segundo resto e assim por diante, até que o resto seja igual a 0 ou a 1. O último resto é o maior número pelo qual a fração dada pode ser simplificada. Por exemplo, para $\frac{142.560}{199.584}$

| | | |
|---|---|---|
| 142560 | 199584 | 1 |
| 28512 | 57024 | 2 |
| | 0 | 2 |

142.560 é contido uma vez em 199584, e o resto é 57024. Esse é contido duas vezes em 142560, sendo o resto 28512 é contido 2 vezes em 57024, não havendo resto. Nessa operação, a funcional cabe aos restos subsequentes e não aos quocientes que apenas são anotados a direita sem ter outra serventia. Do resultado 28512 deduzimos 142560: 28512 = 5 e 199584 : 28512 = 7, portanto

$$\frac{142560}{199584} = \frac{28512 \times 5}{28512 \times 7} = \frac{5}{7}$$

Esse método é chamado de "divisão em cadeia" **. Recomenda-se sua aplicação quando a fração a ser simplificada, não é divisível por nenhum dos fatores primos mais comuns de modo que se deveria procurar durante tempo tais fatores primos.

Eis aqui mais um exemplo, este mais curto: $\frac{693}{1232} = ?$

Divisão em cadeias

| | | |
|---|---|---|
| 693 | 1232 | 1 |
| 154 | 539 | 1 |
| | 77 | 3 |
| | | 2 |

Portanto: $\frac{693}{1232} = \frac{77 \times 9}{77 \times 16} = \frac{9}{16}$

**Vamos explicar mais uma vez, por meio de um exemplo simples, em que consiste a divisão em cadeia. Seja o exemplo $\frac{96}{42}$.

A divisão em cadeia será:

| | | |
|---|---|---|
| 96 | 42 | 2 |
| 12 | 6 | 3 |
| | | 2 |

E se compõem de 3 divisões: a 1ª divisão dá 96 = 42 x 2 + 12

a 2ª divisão dá 42 = 12 x 3 + 6

a 3ª divisão dá 12 = 6 x 2

A 3ª divisão não deixa resto; seu divisor (6) é um fator do seu dividendo (12). O dividendo e o divisor da 3ª divisão são, ao mesmo tempo, divisor e resto da 2ª divisão. Um fator comum do lado direito da equação da 2ª divisão deve também ser um fator do direito da equação da 2ª divisão deve também ser um fator do lado esquerdo da mesma equação e é, portanto, um fator do dividendo (42) como do divisor (2) da segunda divisão. Ora, o dividendo (42) e o divisor (12) da 2ª divisão são, ao mesmo tempo divisor e resto da equação da 1ª divisão e deve portanto também ser seu <u>maior</u> fator comum, se comprovado por uma redisposição das equações:

a 1ª divisão dá 96 – 42 x 2 = 12

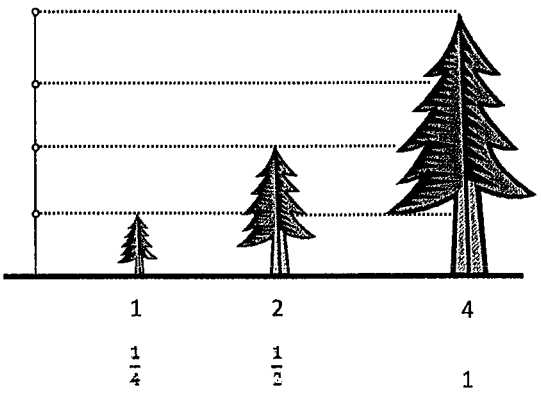
a 2ª divisão dá 42 – 12 x 3 = 6

a 3° divisão dá 12 – 6 x 2 = 0

Todo fator comum de 96 e 42 é um fator do lado esquerdo da equação da 1ª divisão, devendo, portanto ser fator do lado direito. De acordo com a 2ª equação, todo fator comum de 42 e 12 é um fator do lado esquerdo e deve, portanto também ser um fator do lado direito (6). Ora, este é o ultimo resto da divisão em cadeia; ele contém todos os fatores comuns de 96 e 42. Deve ser o maior fator destes dois, por estar contido no primeiro dividendo e no primeiro divisor, não tendo senão fatores comuns destes dois.

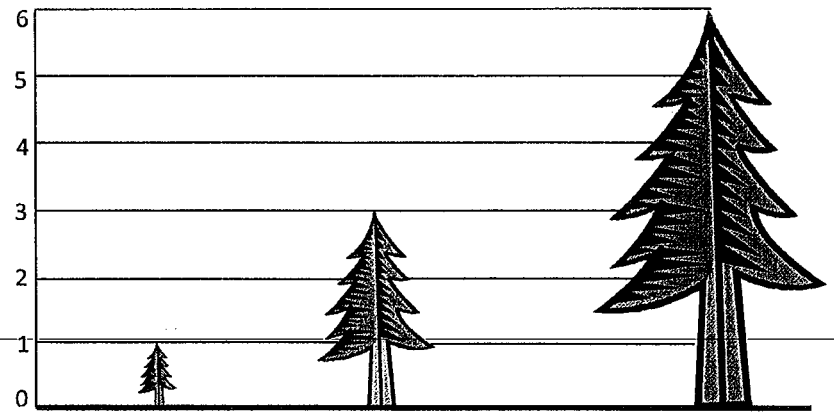
Depois da tríplice introdução das frações e daquela da simplificação, passamos a multiplicação e divisão de frações. Na figura 29, há três árvores de tamanho médio e pequeno. A arvore grande tem a altura duas vezes maior que a média e esta altura duas vezes maior que a pequena. A árvore grande é, portanto 2 x 2 = 4 vezes mais alta que a pequena.

**Fig. 29**




A árvore pequena tem metade $\frac{(1)}{(2)}$ do tamanho da média e esta metade $\frac{(1)}{(2)}$ da altura da grande; a altura da pequena é, pois, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ daquela da árvore grande. Junta-se pois, à multiplicação 2 x 2 = 4 a de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

**Fig. 30**



Na figura 30, temos novamente três árvores. A maior tem duas vezes a altura da média, e 3 vezes a altura da pequena. A árvore grande tem 2 x 3 = 6 vezes o tamanho da pequena. A do meio tem $\frac{1}{2}$ da altura da grande e a pequena 1 da altura da média. A árvore pequena tem $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ do tamanho da grande. Outra vez, temos, alem da multiplicação 2 x 3 = 6, a de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Na figura 31, a árvore grande tem $\frac{4}{3}$ do tamanho da média, e a média do tamanho da pequena. A árvore grande tem, portanto $\frac{4}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{4 \times 3}{3 \times 2} = 2$ vezes o tamanho da pequena. A árvore do meio tem $\frac{3}{4}$ da altura da grande, e a pequena 2 da altura da árvore do meio. A árvore pequena tem, portanto $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{1}{2}$ vezes a altura da grande. Na multiplicação $\frac{4}{3} \times \frac{3}{2}$ o numerador é multiplicado pelo numerador e o denominador com o denominador. Uma multiplicação com $\frac{3}{2}$ aumenta 3 vezes e diminui 2 vezes.

**Fig. 31**

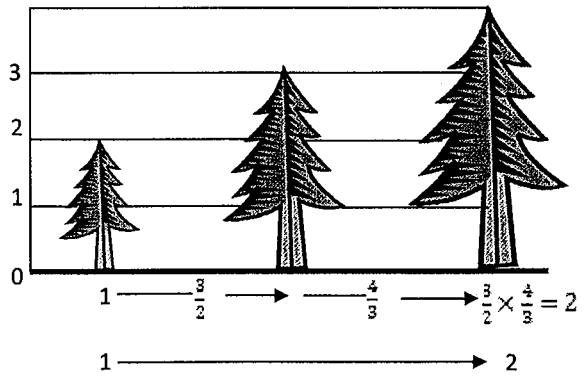
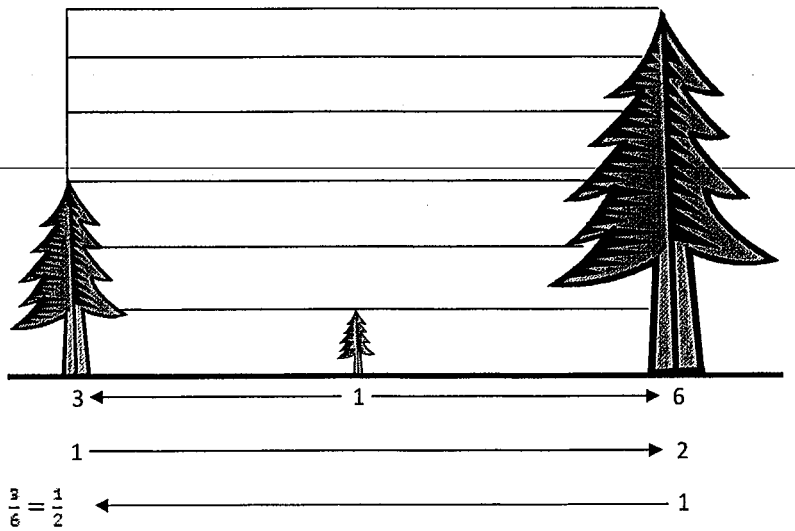
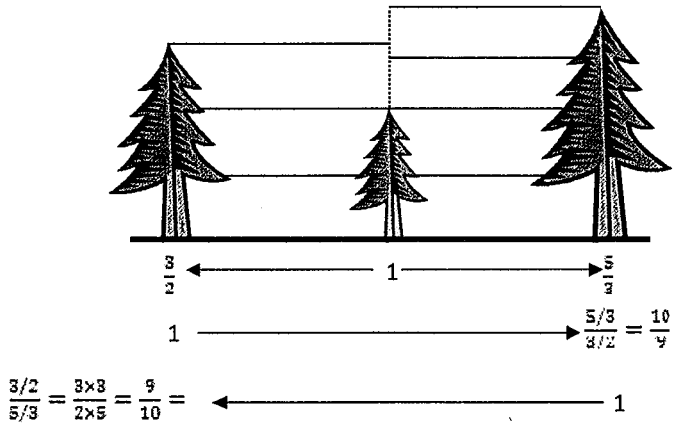



**Fig. 32**



Na figura 32, a árvore média (à esquerda) tem altura 3 vezes maior que a pequena, e a grande, a altura 6 vezes maior que a pequena. A grande é $\frac{6}{3} = 2$ vezes maior que a média e vice-versa, a média $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ vez maior que a grande (isto é, ela tem $\frac{1}{2}$ do tamanho da árvore grande).

**Fig. 33**




Na figura 33, temos novamente três árvores. A árvore medida (à esquerda) tem $\frac{3}{2}$ vezes o tamanho da pequena, e a grande tem $\frac{5}{3}$ vezes o tamanho da pequena. O tamanho da árvore grande é $\frac{\frac{5}{3}}{\frac{3}{2}}$ do tamanho da árvore média.

Multiplicando na fração total em cima e em baixo com 2 e com 3 temos:

$$\frac{\frac{5}{3}\times 2\times 3}{\frac{3}{2}\times 2\times 3} = \frac{\frac{5\times 2\times 3}{3}}{\frac{3\times 2\times 3}{2}} = \frac{5\times 2}{3\times 3} = \frac{10}{9}$$

De outro lado, a árvore média mede $\frac{3}{2}$ do tamanho da grande; multiplicando novamente o numerador e o denominador da fração grande por 2 e por 3, o resultado é:

$$\frac{\frac{3}{2}\times 2\times 3}{\frac{5}{3}\times 2\times 3} = \frac{\frac{3\times 2\times 3}{2}}{\frac{5\times 2\times 3}{3}} = \frac{3\times 3}{5\times 2} = \frac{9}{10}$$

O primeiro resultado $\frac{10}{9}$ provém dos números $\frac{5}{3}$ e $\frac{3}{2}$, multiplicando-se $\frac{5\times2}{3\times3}$, o segundo $\frac{9}{10}$ dos números $\frac{3}{2}$ e $\frac{5}{3}$, fazendo igualmente a multiplicação $\frac{3\times3}{5\times2}$. A primeira fração aparece cada vez em posição normal, a segunda em posição invertida, isto é, com valor recíproco. Quando se divide por 5, a fração fica 5 vezes menor e 3 vezes maior. Chegamos, portanto a seguinte regra: uma fração é dividida por outra ,multiplicando-se a primeira que consiste em multiplicar de um fração.É o contrário da simplificação. Qualquer fração pode ser ampliada com qualquer numero, e com qualquer quantidade de números, enquanto a simplificação ou não pode ser realizada ou pode sê-lo apenas com números determinados.

Exemplos da ampliação de $\frac{1}{2}$ com vários números:

$\frac{1}{2}=\frac{1\times2}{2\times2}=\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}=\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{3}{6}$ $\frac{1}{2}=\frac{1\times4}{2\times4}=\frac{4}{8}$ $\frac{1}{2}=\frac{1\times12}{2\times12}=\frac{12}{24}$

$\frac{1}{2}=\frac{1\times100}{2\times100}=\frac{100}{200}$ $\frac{1}{2}=\frac{1\times1700}{2\times1700}=\frac{1700}{3400}$

A ampliação permite transformar frações que tem denominadores diferentes, em frações tendo o mesmo denominador. Assim como não se pode somar 3 peras e 4 maçãs, ou outros objetos diferentes, frações com denominadores diferentes tampouco podem ser somadas.

O que é necessário é primeiro ampliá-las de modo a que tenham o mesmo denominador. Para não lidar com denominadores e numeradores, com valores maiores que o necessário, procura-se o numerador menor que possa ser obtido com todos os denominadores por meio de multiplicações. Chama-se esse número de menor múltiplo comum (M.M.C). Em muitos casos o MMC pode ser achado imediatamente. Para os denominadores 2 e 3, o MMC é 6, donde:

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=\frac{1\times2}{2\times3}+\frac{5\times2}{3\times2}=\frac{3}{6}+\frac{10}{6}=\frac{13}{6}=2\frac{1}{6}$$

Para os denominadores 5 e 10, o MMC é 10, donde:

$$\frac{3}{5}+\frac{1}{10}=\frac{3\times2}{5\times2}+\frac{1}{10}=\frac{6}{10}+\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

O MMC pode sempre ser calculado por decomposições em fatores primos. Para somar as frações

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{72}=?$$

Obtemos por decomposição em fatores primos (fatoração) dos denominadores:

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 8 | 2 | 9 | 3 | 12 | 2 | 15 | 3 | 10 | 2 | 72 | 2 |
| | | 4 | 2 | 3 | 3 | 6 | 2 | 5 | 5 | 5 | 5 | 36 | 2 |
| | | 2 | 2 | | | 3 | 3 | | | | | 18 | 2 |
| | | | | | | | | | | | | 9 | 3 |
| | | | | | | | | | | | | 3 | 3 |

O MMC é 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 5 = 360. Contém cada um dos fatores primos encontrados tantas vezes quantas ocorre no máximo, de modo que todos os fatores primos de cada denominador estão contidos nele. A adição das frações é efetuada como segue:

A soma dos numeradores, sendo o denominador comum dá:

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times2\times2\times3\times3\times5}{2\times2\times2\times3\times3\times5}=\frac{180}{360} \qquad 180$$

$$\frac{1}{8}=\frac{1\times3\times3\times5}{8\times3\times3\times5}=\frac{45}{360} \qquad 45$$

$$\frac{1}{9}=\frac{1\times2\times2\times2\times5}{9\times2\times2\times2\times5}=\frac{40}{360} \qquad 40$$

$$\frac{1}{12}=\frac{1\times2\times3\times5}{12\times2\times3\times5}=\frac{30}{360} \qquad 30$$

$$\frac{1}{15}=\frac{1\times2\times2\times2\times3}{15\times2\times2\times2\times3}=\frac{24}{360} \qquad 36$$

$$\frac{1}{10}=\frac{1\times2\times2\times3\times3}{10\times2\times2\times3\times3}=\frac{36}{360} \qquad \frac{5}{360}$$

$$\frac{1}{72}=\frac{1\times5}{72\times5}=\frac{5}{360}$$

O resultado final é $\frac{360}{360}=1$

As fatorações podem também ser resumidas num só cálculo. Escrevermos todos os denominadores lado a lado e traçamos uma linha horizontal em baixo, e outra na vertical, ao lado deles. Escrevemos então o menor fator primo comum a pelo menos dois denominadores, à direita do lado do traço vertical. Em baixo de cada denominador divisível por esse fator escrevemos o quociente obtido quando se efetua a divisão; os denominadores que não contém, são repetidos inalterados:

| 2 | 8 | 9 | 12 | 15 | 10 | 72 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 9 | 6 | 15 | 5 | 36 | 2 |
| 1 | 2 | 9 | 3 | 15 | 5 | 18 | 2 |
| 1 | 1 | 9 | 3 | 15 | 5 | 9 | 3 |
| 1 | 1 | 3 | 1 | 5 | 5 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 5 | 5 | 1 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |

Extraí-se agora o fator primo, contido em pelo menos dois números, e repete-se esse processo até não existir mais nenhum fator comum. Se nessa altura, todas as colunas de denominadores terminam por 1, o produto de todos os fatores extraídos é o MMC. Se, porém, em baixo de alguns denominadores, ainda sobram outros números, o produto dos fatores escritos ao lado ainda deve ser multiplicado por esses números. Por exemplo:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{12}+\frac{3}{16}+\frac{7}{18}+\frac{1}{24}+\frac{13}{36}=?$$

A escrita resumida dos denominadores para descobrir-se o MMC é a seguinte:

| 3 | 12 | 16 | 18 | 24 | 36 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 8 | 9 | 12 | 18 | 2 |
| 3 | 3 | 4 | 9 | 6 | 9 | 2 |
| 3 | 3 | 2 | 9 | 3 | 9 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | |

O menor múltiplo comum é: 2 x 2 x 2 x 3 x 3 x 2 = 144. A ampliação das frações dá:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times2\times2\times2\times2\times3}{3\times2\times2\times2\times2\times3}=\frac{96}{144}$$

$$\frac{5}{12}=\frac{5\times2\times2\times3}{12\times2\times2\times3}=\frac{60}{144}$$

$$\frac{3}{16}=\frac{7\times2\times2\times2}{18\times2\times2\times2}=\frac{56}{144}$$

$$\frac{1}{24}=\frac{1\times2\times3}{24\times2\times3}=\frac{6}{144}$$

$$\frac{13}{36}=\frac{13\times2\times2}{36\times2\times2}=\frac{52}{144}$$

E a soma das frações:

$$\frac{96}{144}+\frac{60}{144}+\frac{27}{144}+\frac{56}{144}+\frac{6}{144}+\frac{52}{144}=\frac{297}{144}=2\frac{1}{16}$$

Na subtração de frações ou numa combinação de adições e subtrações, procede-se analogamente

$$\frac{6}{15}-\frac{2}{10}+\frac{7}{20}-\frac{1}{16}-\frac{11}{30}=?$$

| 15 | 10 | 20 | 16 | 30 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 5 | 10 | 8 | 15 | 2 |
| 15 | 5 | 5 | 4 | 15 | 3 |
| 5 | 5 | 5 | 4 | 5 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | 4 | 1 | |

Menor múltiplo comum:

2 x 2 x 3 x 5 x 4 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3 x 5 = 240

Ampliação das frações:

$$\frac{6}{15}=\frac{6\times2\times2\times2\times2}{15\times2\times2\times2\times2}=\frac{36}{240}$$

$$\frac{2}{10}-\frac{2\times2\times2\times2\times3}{10\times2\times2\times2\times3}-\frac{48}{240}$$

$$\frac{7}{20}=\frac{7\times2\times2\times3}{20\times2\times2\times3}=\frac{84}{240}$$

$$\frac{1}{16}=\frac{1\times3\times5}{16\times3\times5}=\frac{15}{240}$$

$$\frac{11}{30}=\frac{11\times2\times2\times2}{30\times2\times2\times2}=\frac{88}{240}$$

Adição e subtração das frações:

$$\frac{96}{240}-\frac{48}{240}+\frac{84}{240}-\frac{15}{240}-\frac{88}{240}-\frac{180}{240}-\frac{151}{240}-\frac{29}{240}$$

Um tipo especial de frações são as chamadas frações em cadeia. Existem, por exemplo, frações em cadeia que contém apenas o algarismo 1:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}$$

Calcula-se o valor da fração começando em baixo. Sob o ultimo traço há apenas um 1, sob o penúltimo:

$$1+\frac{1}{1}=1+1=2$$

Sob o antepenúltimo traço, temos:

$$1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Sob o 4° de baixo:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1}}}=1+\frac{\frac{1}{3}}{2}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

E sob o 5° de baixo:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=1+\frac{1}{\frac{5}{3}}=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$$

e sob o primeiro de cima:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=1+\frac{1}{\frac{8}{5}}=1+\frac{5}{8}=\frac{13}{8}$$

O valor total da fração em cadeia tem, portanto o valor:

$$\frac{1}{\frac{13}{8}}=\frac{8}{13}$$

Esse valor é aquele da "Proporção Harmônica" (numero de ouro): G = 0,61803398875.... . Quanto mais se continua essa fração em cadeia, mais preciso o valor de G.

Há ainda outros valores de números notáveis da matemática que podem ser eximidos de forma de frações em cadeia de estrutura regular:

$$=4\times\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{3^2}{2+\cfrac{5^2}{2+\cfrac{7^2}{2+\cfrac{9^2}{2\ldots}}}}}}$$

e

$$-1+1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{8}\ldots}}}}}}$$

## FRAÇÕES DECIMAIS

Enquanto o calculo com frações ordinais já era conhecido na Antiguidade, as frações decimais têm sua origem apenas no século XVI. Sua primeira aparição se verifica numa coleção de problemas aritméticos de Christoph Rudolf publicada no ano de 1530 em Augsburg. A primeira discussão sistemática dos cálculos com frações decimais foi feita pelo matemático holandês Simon Stevin (1548 – 1620). No plano de ensino Waldorf, as frações ordinárias aparecem no quinto, e as decimais no sexto ano.

Frações decimais são formadas quando se continua a divisão de dois números além das unidades, abaixando zeros para completar os restos que aparecem:

2546 : 7 = 363,714285 ...

21
44
42
26
21
50
49
10
7
30
28
20
14
60
56
40
35
5

No exemplo acima, os restos são: 4; 2; 5; 1; 3; 2; 6; 4; 5..., o resto seguinte seria novamente 1, depois seguiriam os restos 3; 2; 6; 4; 5. Estes constituem uma sequência que sempre se repetiria ritmicamente. Quando se divide por 7, se os algarismos de 1 a 6 podem ser restos; quando se abaixam os zeros, uma repetição dos passos deve ocorrer depois de 6 passos, no máximo. De maneira geral, uma repetição rítmica dos restos tem que ocorrer nas divisões com zeros abaixados. O número dos restos que se repetem

("período") é menor de 1, no máximo, que o divisor. As frações mais simples transformadas em frações decimais são:

$\frac{1}{2} = 0{,}5$

$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$

$\frac{1}{4} = 0{,}25$

$\frac{1}{5} = 0{,}2$

$\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$

$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ldots$

$\frac{1}{8} = 0{,}125$

$\frac{1}{9} = 0{,}11111\ldots$

$\frac{1}{10} = 0{,}1$

$\frac{1}{11} = 0{,}090909\ldots$

$\frac{1}{12} = 0{,}83333\ldots$

$\frac{1}{13} = 0{,}076923\ldots$

$\frac{1}{14} = 0{,}0714285\ldots$

$\frac{1}{15} = 0{,}06666\ldots$

Colocam-se alguns pontos depois das frações cuja sequência de algarismos não está completa. Além disso, coloca-se um traço horizontal em cima dos algarismos, é sobre ele que se coloca o traço.

Nas frações decimais sem pontos, a divisão se completa sem que haja resto. Isso se verifica com as seguintes frações:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{10}$$

Se continuássemos a série, encontraríamos:

$$\frac{1}{16} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{1}{32} \quad \frac{1}{40} \quad \frac{1}{50} \quad \frac{1}{64}$$

Todas essas frações tem denominadores que apenas contém, como fatores, 2 e 5. Como qualquer fração decimal sem período pode ser também a fração ordinária correspondente deve ser transformável em um inteiro mediante a multiplicação com esses fatores de 10; isto é, seu denominador deve, nesse caso, ser suscetível de simplificação. Isso, porém, apenas é possível se um denominador só contém fatores de 2 e 5, por exemplo: $\frac{1}{8} = 0{,}125$

$$0{,}125 \times 1000 = 125; \quad \frac{1}{8} \times 1000 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5}{8} = 5 \times 5 \times 5 = 125$$

É possível dizer de antemão, quantas decimais determinada fração vai ter, por exemplo:

$\frac{11}{16} = \frac{11}{2 \times 2 \times 2 \times 2}$.

Se o denominador contém 4 fatores de 2, são necessários 4 fatores de 10 para simplificar o denominador. A fração decimal terá, portanto, quatro casas depois da vírgula:

$\frac{11}{16} = 0{,}6875$

Outros exemplos:

$\frac{84}{125} = \frac{84}{5 \times 5 \times 5}$ deve ter 3 decimais : $\frac{84}{125} = 0{,}672$

$\frac{231}{400} - \frac{231}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5}$ deve ter 4 decimais : $\frac{231}{400} - 0{,}5775$

$\frac{307}{500} = \frac{307}{2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5}$ deve ter 3 decimais: $\frac{307}{500} = 0{,}614$

No primeiro exemplo, precisamos de 3 fatores de 10, para simplificar o denominador, no segundo, 4 e no terceiro, 3 fatores de 10. O maior numero de fatores iguais de 2 e 5

denominadores indica quantos fatores de 10 são necessários; e isso determina o numero de decimais, sobre o qual o numerador não tem nenhuma influencia.

Na série das frações decimais de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{15}$, uma em cada três, ou seja aquelas cujo denominador contém o fator 3, tem uma seqüência infinita de decimais constituída pela repetição de uma única cifra, isto é, um período de um algarismo. Entre as frações ordinárias existe uma que dá uma fração decimal com um período de dois algarismos: $\frac{1}{11} = 0{,}0909\ldots$ na série de $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{15}$ não há fração com um período de três algarismos; a primeira fração desse tipo é $\frac{1}{37} = 0{,}27027\ldots$ Nesta série também não existe fração que tenha um período de quatro algarismos; para chegarmos a tal fração, temos que ir até $\frac{1}{101} - 0{,}00990099\ldots$ A primeira fração com um período de cinco algarismos é $\frac{1}{41} = 0{,}2439022439\ldots$ Períodos de seis cifras encontram-se três vezes na série compreendida entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{15}$:

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$$

$$\frac{1}{13} = 0{,}076923076923\ldots$$

$$\frac{1}{14} = 0{,}0714285714285\ldots$$

O primeiro período de sete algarismos se encontram em:

$$\frac{1}{239} = 0{,}00418410041841\ldots$$

O primeiro de oito em $\frac{1}{73} = 0{,}01369863013698630\ldots$

Mas o primeiro de nove só em

$$\frac{1}{333667} = 0{,}000002997000002997\ldots$$

Outra série de considerações pode ser tecida a respeito da seqüência seguinte:

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$$

$\frac{2}{7} = 0{,}285714285714\ldots$

$\frac{3}{7} = 0{,}428571428571\ldots$

$\frac{4}{7} = 0{,}571428571428\ldots$

$\frac{5}{7} = 0{,}714285714285\ldots$

$\frac{6}{7} = 0{,}857142857142\ldots$

Os períodos acima têm 6 cifras, ou seja: 1, 2, 4, 5, 7, 8; faltam portanto as cifras 0, 3, 6 e 9. Além disso, a ordem é sempre esta 1 – 4 – 2 – 8 – 5 – 7 – 1 ; os primeiros algarismos depois da vírgula, para as frações: $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}$, etc. são 1, 2, 4, 5, 7, 8; eles observam, portanto, uma ordem ascendente.

O que diferencia as frações decimais das ordinárias é a possibilidade de se determinar a primeira vista qual delas tem valor maior. Não se pode dizer de imediato se $\frac{5}{13}$ ou $\frac{12}{29}$ é maior, mas não há problema quando ambas as frações são escritas sob a forma decimal:

$\frac{5}{13} = 0{,}38461\ldots$ $\frac{12}{29} = 0{,}41379\ldots$

Sua soma é 28, ou seja, o número do qual partimos. Um numero que permite voltar dessa forma a sim próprio, é chamado numero perfeito. O menor numero perfeito é 6 que contem os números 1, 2, 3, cuja soma $1 + 2 + 3 = 6$. Depois de 28, o próximo é 496. Sua fatoração é a seguinte:

| | |
|---|---|
| 496 | 2 |
| 248 | 2 |
| 124 | 2 |
| 62 | 2 |
| 31 | 31 |

Os números contidos em 496 são:

1 2 4 8 16 31 62 124 284

e sua soma é 496. São conhecidos até agora 30 desses números perfeitos seu maior é

170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884

727 x $2^{136}$, no qual o ultimo fator, $2^{136}$ , já representa um número altíssimo. Seu tamanho permite avaliar quantos esforços foram necessários para descobri-lo.

Nos demais números, aqueles que não são perfeitos, a soma dos seus divisores é, ou maior ou menor que o numero inicial. Há números cujos divisores somados representam o dobro do valor inicial, como 120 ou 672 ou 523000; outros onde essa soma é o triplo, como por exemplo, 30240 e 32760. Existem múltiplos ainda maiores. Números primos e números com poucos divisores é possível calcular um números decimal que indica que o múltiplo de si próprio é representado pela soma de seus divisores. Feito isso, podemos procurar os números que, dentro de um determinado espaço numérico, possuem os maiores dentre esses números decimais. No espaço numérico de 1 a 20, é o 12. Sua fatoração é

| | |
|---|---|
| 12 | 2 |
| 6 | 2 |
| 3 | 3 |

seus divisores 1, 2, 3, 4, 6, e a soma destes, 16. Seu números decimal para $\frac{16}{12}$ é 1,333...

Outros números cujas frações decimais se aproximam desse valor, são 18 e 20:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | 2 | Divisores 1, 2, 3, 6, 9 | 20 | 2 | Divisores 1, 2, 4, 5, 10 |
| 9 | 3 | Soma 21 | 10 | 2 | Soma: 22 |
| 3 | 3 | Fração decimal $\frac{21}{18} = 1{,}166$ | 5 | 5 | Fração dec. $\frac{22}{20} = 1{,}1$ |

No maior dos números inferiores a 20, porém, as frações decimais não chegam a 1; isso acontece até no 16:

| | | |
|---|---|---|
| 16 | 2 | Divisores 1, 2, 4, 8, |
| 8 | 2 | |
| 4 | 2 | Soma 15 |
| 2 | 2 | Fração decimal $\frac{15}{16} = 0{,}937$ |

A fração decimal mais elevada (exprimindo a relação entre a soma dos divisores é o numero de base) é, para o espaço numérico até 100, o 60 (1,8) e até 500, o 360 (2,25).

Esses números são os que se usam em muitas medidas (12 no relógio, 60 segundos por minuto, 60 minutos por hora, 360 graus no círculo, etc.)

Pitágoras foi, em certo dia, solicitado por um discípulo, a dizer qual seria a melhor base pra uma amizade, inclusive aquela que conduz ao matrimonio. Pitágoras respondeu que a melhor amizade seria a que obedeceria a relação entre os números 220 e 284. Estes têm as seguintes fatorações:

| | |
|---|---|
| 220 | 2 |
| 110 | 2 |
| 55 | 5 |
| 11 | 11 |

| | |
|---|---|
| 284 | 2 |
| 142 | 2 |
| 71 | 71 |

Os divisores de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 44, 55, 110 e sua soma é 284; os divisores de 284 são 1, 2, 40, 71, 142 e a sua soma é 220. Dois números indicados por Pitágoras, cada um é a soma dos divisores do outro. Os mesmos algarismos cuja adição constitui 220 são divisores de 284 (isto é, sua multiplicação dá 284 ( isto é, sua multiplicação dá 284), e os números que, pela adição constituem o 284, têm por produto 220. Como a adição é uma justaposição de grandezas e a multiplicação, uma repetição de algo que já existe, sendo, portanto a adição um acréscimo de fora e a multiplicação um acréscimo por dentro, a resposta de Pitágoras pode ser exprimida assim: A melhor amizade é aquela onde os valores que um parceiro como qualidades interiores, aparecem no outro numa forma extrovertida, e vice-versa. Essa resposta não deixa realmente de ser bem definida e profunda.

Do ponto de vista matemático, junta-se a esta pergunta se existem outros "pares de números amigos". São raríssimos. Em toda a antiguidade não foi descoberto outro par. Só o grande matemático Frances Fermat achou em 1638 o segundo par: 17296 e 18416. Dois anos depois Descartes descobriu o terceiro par: 9363584 e 9437056. No século seguinte. Leonhard Euler (1707-1783) ampliou a lista dos pares dos números da amizade para mais de 60 e atualmente, de acordo com uma publicação de E. B. Escott a esse respeito, em Scipta Mathematica, New York, a posição é de 390 pares. As pesquisas dos grandes matemáticos seguiram nesta busca, a certas relações numéricas, e foi assim, que em 1866 um rapaz italiano de 16 anos, Nicolo Paganini, descobriu o par que, em valor, é o segundo menor: 1184 e 1210.

## ALGUMAS OBSERVAÇÕES A RESPEITO DA INTRODUÇÃO DA ÁLGEBRA

Como a introdução da álgebra constitui o passo que leva do manuseio dos cálculos para uma análise dos próprios processos calculatórios, o caminho a seguir conduzi de determinados cálculos a certas relações que tem validade universal.

Começamos por uma longa multiplicação, por exemplo:

$$
\begin{array}{r}
432516 \times 71342 \\
865032 \\
1730064 \\
1297548 \\
432516 \\
3027612 \\
\hline
30856555472
\end{array}
$$

e em seguida:

$$
\begin{array}{r}
71342 \times 432516 \\
428052 \\
71342 \\
356710 \\
142684 \\
214026 \\
285368 \\
\hline
30856556472
\end{array}
$$

Na segunda multiplicação, os fatores da primeira são trocados. Os produtos intermediários são deferentes; isso já decorre do fato de possuir a primeira multiplicação 5 produtos parciais, e a segunda, 6. Quanto mais compridas as multiplicações, mais surpreendentes a concordância dos resultados. Podemos agora pedir aos alunos, resumir esta situação numa frase tão breve quanto possível. Há quem formule, por exemplo, proposição seguinte: na multiplicação de dois números, por grandes que sejam, chega-se sempre ao mesmo resultado, se os dois números são trocados e novamente multiplicados um pelo outro. Recorrendo a expressão "fatores", a proposição pode ser

reduzida a seguinte expressão "fatores", a posição pode ser reduzida à seguinte expressão de três palavras: Fatores são permutáveis.

Mas mesmo a brevidade dessa sentença não alcança aquela da seguinte maneira de se anotar o fato:

$$a \times b = b \times a$$

Essa expressão indica que se trata de uma dupla multiplicação, da de dois números, que os dois fatores são trocados e que, nos dois casos, o resultado é o mesmo. Na mesmo taquigrafia matemática podemos também escrever:

$$a \times b \times c = c \times b \times a$$

ou para a adição:

$$a + b = b + a \text{ , etc.}$$

Podemos escrever dessa maneira também a adição de frações. Para tal, partimos novamente de uma adição determinada:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{4}$$

Executando a adição mediante a ampliação das frações em vista de um denominador comum:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{4} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} + \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{8}{12} + \frac{15}{12} = \frac{23}{12}$$

Multiplicam-se, pois, numerados e o denominador da primeira fração com o denominador da segunda e vice-versa. Para o processo geral, temos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b}$$

Podemos examinar nessa altura a anotação algébrica de várias operações aritméticas. Quando se multiplica 11 x 11 = 121 e pergunta de que maneira as duas partes de 11, o dez e o um, entram no resultado, se vê que 100, de 121, nascem de 10 x 10, e o 1 de 121, de 1 x 1, e o 20 pela dupla multiplicação de 10 x 1. No caso de 12 x 12 = 144, o 100 provem novamente de 10 x 10, e o 4 de 2 x 2, e o 40 de duas vezes 10 x 2. Obtemos portanto (10 + 2) (10 + 2) = 10 x 10 + 2 x 2 + 10 x 2 x 2 . Em 12 x 13 = (10 + 2) (10 + 3) = 156 = 10 x 10 + 2 x 3 + 10 x 2 + 10 x 3, encontramos no resultado 10 x 10 = 100, 2 x 3 = 6 e os 50 resultam de 10 x 3 e 10 x 2. De maneira analógica temos em 12 x 14 =

168 = (10 + 2) (10 + 4) = 10 x 10 + 2 x 4 + (10 x 4) + (10 x 2). As partes participam, portanto no resultado da seguinte maneira: (a + b) (c + d) = ac + bc + ad + bd, ou no caso de igualdade dos fatores: (a + b) (a + b) = a x a + 2a x b + b x b = $a^2$ + 2ab + $b^2$.

Considerações analógicas aplicam-se à subtração, por exemplo, 8 x 8 = (10 – 2) x (10 – 2) = 64. Efetuando as multiplicações intermediárias como acima, temos:

$$10 \times 10 = 100;\ 2 \times 2 = 4;\ 10 \times 2 = 20;\ 10 \times 2 = 20 \text{ e } 100 + 4 - 20 - 20 = 64$$

Para se chegar a este 64, 10 x 10 e 2 x 2 devem ter valor positivo e os outros produtos, valor negativo. No caso de 10 x 10 temos dois números sem sinal negativo, no caso de 2 x 2, dois números com sinal negativo, e esses dois produtos intermediários são somados. No caso de 10 x 2, temos nas duas vezes, um numero com outro sem sinal negativo, e estes produtos parciais são subtraídos. Coisa semelhante pode ser verificada em muitas multiplicações. Podemos, depois, passar a considerar os números compostos de 3 partes:

$$(10 - 2 - 3)\ (10 - 1 - 4) = 5 \times 5 = 25$$

Produtos intermediários:

| | | |
|---|---|---|
| 10 x 10 | 10 x 1 | 10 x 4 |
| 2 x 10 | 2 x 1 | 2 x 4 |
| 3 x 10 | 3 x 1 | 3 x 4 |

Devem ser adicionados:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | x | 10 | = | 100 |
| 2 | x | 1 | = | 2 |
| 3 | x | 1 | = | 3 |
| 2 | x | 4 | = | 8 |
| 3 | x | 4 | = | 12 |
| | | | | 125 |

Devem ser subtraídos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | x | 10 | = | 20 |
| 3 | x | 10 | = | 30 |
| 10 | x | 1 | = | 10 |
| 10 | x | 4 | = | 40 |
| | | | | 100 |

$125 - 100 = 25$

Quais os produtos a serem somados e quais os que devem ser subtraídos, é decidido pela aplicação da mesma regra. Quando se multiplicam dois números sem sinal de "menos", o produto é somado; quando se multiplicam dois números que, ambos, tem o sinal "menos", o produto também é somado. Mas quando se multiplicam dois números um dos quais, apenas, tem o sinal "-", então o produto parcial é subtraído. Outro exemplo:

$(10 + 3 - 5)\ (12 + 2 - 3) - 8 \times 11 - 88$

Produtos intermediários:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sem sinal "-" | 10 X 12 | 10 X 2 | 10 x 3 |
| | 3 X 12 | 3 X 2 | 3 X 3 |
| | 5 x 12 | 5 x 2 | 5 X 3 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Com 2 sinais "-" | 10 | X 12 | = | 120 |
| | 3 | X 12 | = | 36 |
| | 10 | X 2 | = | 20 |
| | 3 | X 2 | = | 6 |
| | 5 | x 3 | = | 15 |
| | | | | 197 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Com um sinal "-" | 5 | X 12 | = | 60 |
| | 5 | X 2 | = | 10 |
| | 10 | X 3 | = | 30 |
| | 3 | x 3 | = | 9 |
| | | | | 109 |

$197 - 109 = 88$

As regras para a adição e para a subtração:

$+ X + = +$ $\qquad$ $+ X - = -$

$- X - = +$ $\qquad$ $- X + = -$

Os alunos apreciarão que as decisões podem agora ser tomadas mais facilmente na base de situações analisadas em comum com eles. A simples afirmação "a Priori" da regra "**menos** vezes **menos** dá **mais**" ficaria para muitos incompreensíveis.

Para introduzir as equações, ponto de partida pode ser o seguinte. Digo a classe: imagino um numero. Não vou dizer, qual é, mas se lhe acrescento 2 e dividido a soma por 3, o resultado será 4. O raciocínio para se descobrir o numero, deve começar pelo fim, pois só o resultado final é conhecido. Como se obteve 4 depois de uma divisão por 3, o numero anterior deve ter sido 12. Antes disso, foram somados a um numero, e o numero obtido pela adição de 2, foi 12. O numero anterior deve, portanto ser 10. Para se anotar o processo todo, a gente escreve, para designar o numero originalmente imaginado, "x". A informação tem a forma:

$$\frac{x+2}{3} = 4$$

e a resolução dá;

$$x + 2 = 12$$

$$x = 10$$

Esse problema pode ser ampliado. Novamente imagino um número. Se somo 2, divido por 3, somo 6, diviso por 5, somo mais 4 e divido o resultado por 3, o resultado final é 2. Anotando terei:

$$\frac{\dfrac{\dfrac{x+2}{3}+6}{5}+4}{3} = 2$$

A solução começa novamente pelo fim. A ultima operação era dividir por 3 e o resultado era 2; antes da divisão, a expressão tinha que ter o valor, portanto

$$\frac{\dfrac{X+2}{3}+6}{5}+4 = 6$$

Antes disso, a ultima operação era somar 4; o número que somando a 4, deu 6, só pode ter sido um 2:

$$\frac{\frac{X + 2 + 6}{3}}{5} = 2$$

Antes disso, houve uma divisão por 5, e o resultado era 2; devia portanto ter havido um 10:

$$\frac{x \div 2}{3} \div 6 = 10$$

Aí houve adição de 6, com a soma 10. O valor anterior era, portanto 4:

$$\frac{x \div 2}{3} = 4$$

Um numero que, dividido por 3, dá 4, só pode ser um 12, portanto:

$$x \div 2 = 12$$

O numero inicial era, portanto, 10. Fizemos, portanto, em cada caso, a operação contrária, método característico para se resolverem equações. Outro problema seria:

$$\frac{\frac{\frac{x + 2 + 5}{3} + 5}{4}}{7} = 1$$

e sua solução:

$$\frac{\frac{\frac{x + 2 + 5}{3} + 5}{4}}{7} = 7$$

$$\frac{\frac{x + 2 + 5}{3}}{4} = 2$$

$\frac{x+2}{3} \div 5 = 8$ $\frac{x+2}{3} = 3$ $x + 2 = 9$ $x = 7$

Podemos elaborar um numero infinito de tais problemas, sempre partindo de um numero que deve ser descoberto e fazendo com ela várias operações cujo resultado final é dado acontecer. Depois de resolver a equação, convém fazer a verificação.

No problema seguinte, temos que recorrer às 4 operações:

$$\frac{(x+1}{3}+4)\times 2-8=4$$

Numa fração, o traço sempre indica o que deve ser incluído na divisão. Mas na multiplicação podem ocorrer mal entendidos. Para evitá-los usam-se parênteses que expressam que seu conteúdo deve ser considerado com um todo que, como tal, entra na multiplicação. O parêntese pode ser encarado como um envoltório do qual se omitiu a parte de cima e de baixo. O problema acima dá:

$$\frac{(x+1)+4)\times 2=12}{3}$$

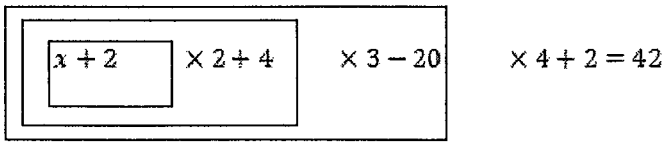
$$\frac{x+1}{3}+4=6$$

$$\frac{x+1}{3}=2$$

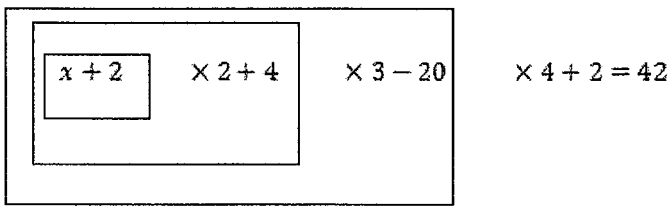
$$X+1=6$$

$$X=5$$

Novamente fazemos, para cada operação, a operação oposta: 12 é dividido por 2, do resultado se subitrai 4, multiplica-se por 3 e o 1 é subtraido. Se ocorrem várias multiplicações, devemos recorrer várias vêzes a envoltórios, por exemplo:




Se fossemos deixar apenas a parte direita e esquerda dos retângulos formando os envoltorios, não seria claro quais os conjuntos que formam um todo. Por esse motico, dá-se uma forma especial a cada envoltório:



Eliminando para maior simplificação a partes superiores e inferiores, a escrita é:

$$\left\{\left[(x+2)\times 2+4\right]\times 3 \quad 20\right\}\times 4+2=42$$

Para esse parêntese de diversos tipos, observa-se uma ordem definida:

1) Parênteses ( )
2) Colchetes [ ]
3) Chaves { }
4) Chaves { }

Também os problemas com parênteses, vale a regra de que exemplos bem compridos são particularmente instrutivos.

De equações onde a incógnita está no primeiro lugar, se passará paulatinamente para outras em que ela ocupa posições diversas ou é repetida em vários lugares. Mas mesmo em estados ulteriores da álgebra, recomenda-se sempre voltar ocasionalmente à transição de exemplos numéricos para o processo, a fim de percorrer novamente o caminho característico da álgebra.

## PROBLEMAS PRÁTICOS

Pode-se dizer que a discussão de problemas práticos pode ser transformada em uma autentica ciência da vida. Pelo trabalho mental que é necessário para se efetuar os cálculos, um relacionamento vivo é estabelecido entre o aluno e o campo do qual o problema é tirado. Em todos os problemas práticos, o que importa é, de um lado, a atualidade e o realismo, e de outro, a indicação de situações básicas.

Um exemplo: Podemos falar sobre a construção de túneis. Descrevemos como os trabalhadores de perfuração são iniciados simultaneamente nas duas extremidades, como se avança adentro até que as duas galerias se encontrem no meio da montanha. Convém lembrar com quanta precisão as medidas e os cálculos devem ser efetuados para que os eixos das duas seções em construção, não se desencontrem. Na realidade, os "desvios" verificados na construção dos grandes túneis alpinos eram poucos centímetros!

Essa precisão nunca poderia ser conseguida por meio de mapas. Torna-se necessário fazer previamente uma medição especial entre as extremidades dos túneis, mas passando por cima da montanha. Quais são os tuneis mais compridos da terra? São túneis ferroviários e tuneis relacionados com fornecimento de água (por exemplo, na Califórnia). Os túneis ferroviários mais compridos da Europa se encontram nos Alpes:

| | |
|---|---|
| O túnel de Löschberg, Suíça, 1912 | 14,54 Km |
| O túnel de St. Gotthard, Suíça, 1882 | 14,99 Km |
| O túnel dos Apeninos, perto de Lagaro (Itália) entre Bologna e Florença, 1934 | 18,51 Km |
| O túnel de Simplon, Suiça-Itália, 1906 | 19,73 Km |

Surge a pergunta: Quanto tempo se levaria para atravessar os túneis a pé? Tomando por base uma velocidade de 5 Km por hora, o tempo para atravessar o Löschberg seria $\frac{14.54}{5} = 2.908$ horas. Para expressar a fração decimal em horas e minutos, os milésimos devem ser transformados em sexagésimos. Para tal, o denominador 1000 é dividido por 100 e multiplicado por 6. Obtemos, pois, 2 horas e

| | | |
|---|---|---|
| 908 x 6 | | 908 x 6 |
| 100 | = | 100 |
| 1000 x 6 | | 60 |
| 100 | | |

Horas = $\frac{908 \times 6}{100} = 54{,}48\ minutos$

O mesmo raciocínio dá para os outros túneis:

| | | |
|---|---|---|
| St. Gotthard | 3 horas | 0 minutos |
| Apeninos | 3 horas | 42 minutos |
| Simplon | 3 horas | 57 minutos |

Quanto tempo leva um trem que anda com uma velocidade de 65 Km/h., para atravessar os túneis? No caso de Lötschberg, $\frac{14{,}54 \times 60}{65} = 13\ min.$ e para os outros túneis:

St. Gotthard: 14 minutos Apeninos: 17 minutos

Simplon: 18 minutos

Quem atravessa um túnel e anota o tempo por meio de um relógio pode calcular a velocidade do trem. Se o tempo necessário para a passagem pelo túnel, foi de 16 ½ minutos, nós temos

em 16 ½ minutos $14{,}54\ km$

em 1 minuto $\frac{14{,}54}{16{,}5}\ km$

em 1 hora $\frac{14{,}54 \times 60}{16{,}5}\ km$

A velocidade era, pois, de 52, 87 km/hora.

Podemos novamente fazer uma comparação com os outros túneis. Se a viagem destes também demora 16 ½ minutos, o trem tem as seguintes velocidades;

St. Gotthard $\frac{14{,}99 \times 60}{16{,}5} = 54{,}51$ Km/ hora

Apeninos $\frac{18{,}51 \times 60}{16{,}5} = 67{,}31$ km/hora

Simplon $\frac{19{,}73 \times 60}{16{,}51} = 71{,}75$ Km/ hora

Depois de tais problemas, podemos, sem sair do assunto geral "tuneis", falar sobre o tempo que era necessário para sua construção. A do túnel do Simplon começou em 13 de Agosto de 1898 e foi em 24 de fevereiro de 1905 que os dois troncos se encontraram.

Quantos dias passaram entre estas datas? Para efetuar esse cálculo, deve-se levar em conta os anos bissextos. Os anos normais tem 365, e os bissextos 366 dias. Com a introdução do calendário gregoriano (1582) a decisão tomada a respeito dos anos bissextos foi a seguinte: todos os anos divisíveis por 4 seriam bissextos, exceto os séculos cheios, salvo os múltiplos de 400 anos. Assim 1904 era um ano bissexto, 1900 não, mas 2000 será novamente um ano bissexto. Essa determinação se baseia no numero médio de dias por ano, que é 365,2422. O calendário gregoriano se baseia na aproximação de 365,2425 que se consegue da seguinte maneira:

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = 365 + 0{,}25 - 0{,}01 + 0{,}0025 = 365{,}2425$$

A fração $\frac{1}{4}$ indica a introdução do ano bissexto em cada 4° ano, a fração - $\frac{1}{100}$ a omissão do ano bissexto nos séculos redondos e a fração $\frac{1}{400}$ sua reintrodução todos os 400 ano. Para o calculo do tempo de construção do Simplon, temos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| de 13 a 31 de | Agosto | 1898 | 19 | dias |
| | Setembro | 1898 | 30 | dias |
| | Outubro | 1898 | 31 | dias |
| | Novembro | 1898 | 30 | dias |
| | Dezembro | 1898 | 31 | dias |
| | Janeiro | 1899 | 365 | dias |
| | Janeiro | 1900 | 365 | dias |
| | Janeiro | 1901 | 365 | dias |
| | Janeiro | 1902 | 365 | dias |
| | Janeiro | 1903 | 365 | dias |
| | Janeiro | 1904 | 365 | dias |
| | Janeiro | 1905 | 31 | dias |
| de 1 a 24 de | fevereiro | 1905 | 24 | dias |
| | No total | | 2387 | dias |

Qual foi então o progresso diário? Em 2387 dias são 19,75 km, portanto $\frac{19750}{2387} = 8{,}27$ mt. por dia.

O que se deve evitar a todo custo nos problemas práticos, é uma "salada" de exemplos, dos quais o primeiro trata de encher uma bacia com água, a seguinte de um veículo e o terceiro, da venda de alguma mercadoria; nesses casos, os resultados achados não encontram o menor interesse, porque os complexos de assuntos não tiveram tempo de se estruturar. É também preciso evitar preços de alimentos sem que tenham sido reajustados à realidade do momento. O que deve ser evitado de toda maneira são exemplos que carecem de qualquer relação real com a vida, por exemplo: o pai tem 35 anos, a mãe 28, e o filho 6 anos. Qual é a sua idade total? Resposta 69 anos!

De outro lado, possuem alto valor intrínseco os exemplos que focalizam determinadas relações matemáticas, como por exemplo: De quanto aumenta a circunferência de uma roda quando se lhe aumenta o raio de 1 dm?

$2(r+1) = 2r+2$ , ou seja, mais ou menos 60 cm. E de quanto aumentaria a circunferência da terra, se seu raio tivesse 1 dm a mais? Resposta: $2(r+1) = 2r+2$ , ou seja, novamente 2 dm = 60 cm; o aumento é igual no caso da roda e da terra!

Para o âmbito dos problemas, recomenda-se também situações históricas como, por exemplo, o seguinte: Da vida do matemático grego Diofantes que vivia ao redor de 250 D.C. na Alexandria, não sabemos mais do século posterior à sua morte. Essas indicações são as seguintes: Eis o túmulo de Diofantes, ouça as medidas da vida dele. Deus lhe deu o sexto para sua infância. Depois de mais doze anos, ele tinha barba crescida (sinal de sua personalidade autônoma), depois de mais sete anos, contraiu casamento e depois, mais 5 anos, nasceu-lhe um filho. Criança querida, mas infeliz, por era meio parecida com o pai e também morreu, como resultado de um destino cruel, quando tinha penas a metade do tempo de vida de seu pai. Este chorou a morte do filho durante os 4 anos que ainda durou sua vida. Diga-nos agora a medida do tempo da vida do pai?

Esse problema se expressa na equação seguinte:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

a qual, depois de multiplicar com 84, assume a forma simplificada

$$14x + 7x + 12x + 420 + 42x + 336 = 84x$$

Reunindo de um lado os membros que contam x, e de outro lado, os demais, temos 9x = 756, e x = 84. Os dados da vida de Diofantes são, portanto:

| | |
|---|---|
| Deus lhe deu para sua infância | 14 anos |
| Teve a barba crescida aos | 21 anos |
| Casou-se aos | 33 anos |
| Nasceu-lhe o filho aos | 38 anos |
| O filho viveu 42 anos, até o pai ter | 80 anos |
| O pai chorou a morte do filho durante 4 | |
| Anos e more aos | 84 anos |

Também para a melhor compreensão de formulas, existe a possibilidade de recorrer a fatos históricos. Em determinada região dos Estados Unidos já havia certa colaboração entre brancos e índios. Foi nessa altura que os colonos brancos pediram aos índios fazer uso das suas instituições, por exemplo, dos seus bancos. Mostram-lhes o cofre-forte no qual seus depósitos seriam guardados. Disseram-lhe que não teriam que pagar nada para a guarda, mas que, ao contrário, ainda receberiam junto sobre as quantias recolhidas. Os índios escutaram a oferta com interesse e em seguida confabularam sobre a conveniência de aceitá-la. Demonstraram inicialmente certa confiança, mas quando a discussão chegou ao fato de que a guarda não só custaria nada mais ainda auferiria juros alguém objetou que isso patente que os brancos não iam guardar dinheiro no cofre, mas sim trabalhar com ele. A decisão final foi então de recusar a oferta.

Em aditamento a isso, a ponderação seguinte cabe a respeito do calculo de juros. Pode haver duas maneiras de os bancos fixarem a porcentagem dos juros ;

1) Quem empresta dinheiro ao banco, recebe uma importância fixa independentemente do montante e do prazo do empréstimo.

2) A pessoa que faz o empréstimo recebe juros na proporção do valor e do prazo do empréstimo. A primeiro modalidade teria como resultado que os empréstimos aos bancos seriam feitos no menor montante e para o menor prazo possível. Todos iriam repartir seu dinheiro sobre o maior numero de bancos possíveis, e movimentá-lo o mais possível. Na segunda modalidade, a gente tem vantagem em emprestar a maior quantidade de dinheiro e para o maior prazo possível. Ela se reflete na forma de juros:

$$J = \frac{c.p.t.}{100}$$

**(J = juros, c = capital na mesma unidade monetária, p = por cento, t = tempo, expresso em anos. (*)**

## A TRANSIÇÃO PARA O SEGUNDO CICLO

O Currículo das escolas Waldorf corresponde no que se refere à Matemática, aquele do segundo ciclo tipo "cientifico" (**) embora com algumas adições que se baseiam em critérios de principio. Prevê-se, por exemplo, para o nono ano, a teoria das combinações que normalmente é em geral matéria do 12° ano. As combinações dão ensejos ás reflexões fundamentais da álgebra.

No inicio da época correspondente, o professor pode, por exemplo, olvidar a ordem que os alunos estão sentados na classe e levantar a questão de quantas possibilidades existem para distribuir os 30 alunos de uma classe em 30 lugares. A pergunta será ainda mais concreta pela indagação adicional de quanto tempo seria necessário para percorrer todas essas distribuições possíveis. Levando em conta uma média de apenas 10 segundos para mudar de distribuição e um tempo disponível de 8 horas por dia, total de distribuições realizadas num ano é da ordem de um milhão, se apenas alguns dias são considerados "livres".

O professor pede aos alunos estimar quanto tempo eles acham necessário para percorrer todas as possibilidades. As respostas são anotadas na lousa. Em geral, há uma divergência considerável nas respostas, de algumas horas até muitos anos ou até séculos. Para se chegar a uma solução é necessário encontrar um caminho para contar as várias distribuições dos alunos nos lugares. Pode-se seguir o seguinte cominho: Supomos que os lugares são vazios e que os alunos estão fora da classe. Chama-se o primeiro aluno. Ele pode sentar-se em um entre 30 lugares. Sua escolha determina a continuação da ordem em que os alunos vão sentar-se e já 30 escolhas possíveis. Chama-se agora o segundo aluno. Para ele, existe apenas a escolha entre 29 lugares livres e sua escolha constitui o segundo passo na determinação da distribuição. Para cada uma das 30 primeiras possibilidades, foram acrescentadas 29 segundas; existem, portanto para os dois primeiros passos 30 x 29 possibilidades. Chama-se o terceiro, o quarto aluno e assim por diante; com cada um a determinação da ordem avança de um passo. O numero das possibilidades se estrutura então como segue:

$$30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25 \ldots\ldots 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

*** Em alemão, a formula é $Z = \frac{k.p.t}{100}$ , sendo Z = Zinsen (juros), k = kapital e as outras letras equivalentes ao português.**

****N.T. No sistema escolar alemão, o tipo de escola é a "Oberrealschule".**

Essa multiplicação chama-se de 30 fatorial ou 30! e dá como produto:

265 252 859 812 191 058 636 308 480 000 000

Calculando com um milhão de distribuições por ano, o numero de nos necessário para se efetuar as ordens, é

265 252 859 812 191 058 636 308 480 anos,

O que ultrapassa de longe tudo que possa ser determinado empiricamente. A determinação do numero pelo calculo e pelo raciocínio excede, pois, tudo que se possa realizar na pratica via de experiências.

Convém examinar, como próximo passo as várias possibilidades concretas de se distribuir um numero reduzido de alunos num número igualmente reduzido de lugares, por exemplo 4. Pede-se à classe indicar na lousa. Uma vez esgotadas as possibilidades, procura-se escrevê-las em certa ordem. Recomenda-se a seqüência seguinte:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1234 | 2143 | 3124 | 4123 |
| 1243 | 2143 | 3142 | 4132 |
| 1324 | 2314 | 3214 | 4213 |
| 1342 | 2341 | 3241 | 4231 |

O ultimo arranjo é a inversão do primeiro. Obtemos 4 grupos: o primeiro contém todos os arranjos que começam com 1, o segundo os que começam com 2, etc. De acordo com isso, os agrupamentos são escritos em colunas. Cada um deles é dividido em 3 partes, de acordo com os algarismos que se acham em segundo lugar quando se lê da esquerda para a direita. Cada uma dessa subdivisões abrange dois arranjos. O numero total dos arranjos é pois:

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$$

Fala-se de 24 permutações de 4 elementos.

Chegamos a considerações diferentes quando temos de escolher, para qualquer serviço, um grupo entre um numero determinado de alunos. Suponhamos que tenhamos a nossa disposição 6 alunos dos quais 4 são necessários para um trabalho. Podemos escolher entre as seguintes possibilidades:

| | | |
|---|---|---|
| 1234 | 2345 | 3456 |
| 1235 | 2346 | |
| 1236 | 2356 | |
| 1245 | | |
| 1246 | 2456 | |
| 1256 | | |
| 1345 | | |
| 1346 | | |
| 1356 | | |
| 1456 | | |

Chamamo-las de combinações de 4 entre 6 elementos. Obtivemos 15 combinações. Não existe numero maior: 2136, por exemplo, seria mesma combinação do que 1236.
Fazendo combinações de 3 entre 6 elementos, temos:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 123 | 234 | 345 | 456 |
| 124 | 235 | 346 | |
| 125 | 236 | | |
| 126 | | 356 | |
| | 245 | | |
| 134 | 246 | | |
| 135 | | | |
| 136 | 256 | | |
| 145 | | | |
| 146 | | | |
| 156 | | | |

ou seja:

$4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 20$ Combinações

As combinações de 2 elementos entre 6 são:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 23 | 34 | 45 | 56 |
| 13 | 24 | 35 | 46 | |
| 14 | 25 | 36 | | |
| 15 | 26 | | | |
| 16 | | | | |

5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15. Se precisarmos de apenas um aluno entre os 6 que se ofereceram, temos 6 possibilidades de escolher um deles. É preciso um pouco de lógica para ver quantas possibilidades existem para enfrentar a situação de que não precisamos de nenhum aluno dos 6! Resposta: Há uma solução só: a de mandar todos os alunos para casa. Do outro lado, o numero de possibilidades de formar 6 alunos um grupo de 7, é zero. Para 6 elementos temos, pois como sequência dos números das combinações possíveis:

1 6 15 20 15 6 1

As quantidades das combinações podem ser calculadas a partir daquelas das permutações. Para o exemplo de 3 entre 5 elementos, começamos por estabelecer o quadro de todas as permutações possíveis de 5 elementos.

Tirando dessas permutações aquelas que começam pelos números 1, 2, 3, ou seja a primeira combinação de 3 entre 5 elementos, teremos:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 12345 | 21345 | 31245 | 41235 | 51234 |
| 12354 | 21354 | 31254 | 41253 | 51243 |
| 12435 | 21435 | 31425 | 41325 | 51324 |
| 12453 | 21453 | 31452 | 41352 | 51342 |
| 12534 | 21534 | 31524 | 41523 | 51423 |
| 12543 | 21543 | 31542 | 41532 | 51432 |
| | | | | |
| 13245 | 23145 | 32145 | 42135 | 52134 |
| 13254 | 23154 | 32154 | 42153 | 52143 |
| 13425 | 23415 | 32415 | 42315 | 52314 |
| 13452 | 23451 | 32451 | 42351 | 52341 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 13524 | 23514 | 32514 | 42513 | 52413 |
| 13542 | 23541 | 32541 | 42531 | 52431 |
| | | | | |
| 14235 | 24135 | 34125 | 43125 | 53124 |
| 14253 | 24153 | 34152 | 43152 | 53142 |
| 14325 | 24315 | 34215 | 43215 | 53214 |
| 14352 | 24351 | 34251 | 43251 | 53241 |
| 14523 | 24513 | 34512 | 43512 | 53412 |
| 14532 | 24531 | 34521 | 43521 | 53421 |
| | | | | |
| 15234 | 25134 | 34124 | 45123 | 54123 |
| 15243 | 25143 | 35142 | 45132 | 54132 |
| 15324 | 25314 | 35214 | 45213 | 54123 |
| 153442 | 25341 | 35241 | 45231 | 54231 |
| 15423 | 25413 | 35412 | 45312 | 54312 |
| 15432 | 25431 | 35421 | 45321 | 54321 |

Ocorrem todas as permutações dos números 1, 2, 3, cujo numero é 3! e cada uma delas ocorre uma vez com 4 e 5 e uma vez com 5, 4, ou seja, as permutações dos algarismos restantes 4 r 5 (2!). A combinação de 1, 2, 3, ocorre, pois, no total 3! X 2! Vezes. Qualquer outra combinação de 3 entre 5 elementos ocorre com a mesma freqüência. O numero de combinações de 3 entre 5 elementos resulta, portanto das 5! permutações como:

$$\frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3}$$

Expressa que se escreve como segue $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. De modo analógico, obtemos das permutações de 7 algarismos para as combinações de 3 entre 7 elementos:

$$\frac{7!}{3!4!} = \frac{7\times6\times5}{1\times2\times3} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

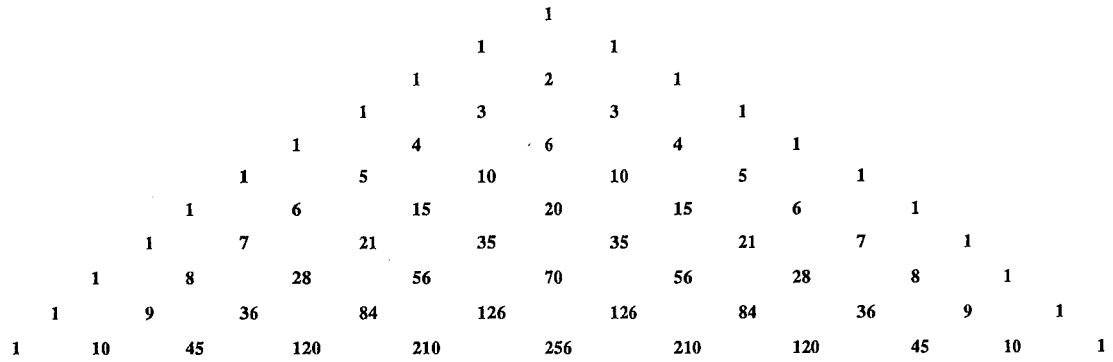
e de maneira geral, das permutações de $n$ algarismos para as combinações de $r$ entre $n$ elementos:

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$$

O calculo permite determinar o numero das possíveis combinações para vários elementos, muito mais rapidamente do que se as anotássemos todas. Para 8 elementos, os números das combinações de 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; e 8 elementos são

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Para as séries dos números de combinações obtemos, sob forma de um triângulo, os números do chamado triângulo de Pascal:




Em cada linha, o primeiro numero é 1, os segundos são os números naturais, os terceiros consistem nos números "de triângulo" (as quantidades correspondentes de moedas podem ser colocadas em ordem triangular), os quartos nos números "de pirâmide" (as quantidades correspondentes podem ser usadas para construir uma pirâmide), etc.

Com o triangulo de Pascal chegamos a uma posição-chave não só da teoria das combinações, mas da teoria das potencias na álgebra. A multiplicação seguida de $a + b$ resulta novamente nos valores do triangulo de Pascal (teorema do binômio).

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

A relação com os números das combinações pode ser mais bem constatada se faz a multiplicação da seguinte série:

$$(1 + x_1) = 1 + x_1$$

$$(1 + x_1)(1 + x_2) = 1 + 1 + x_2 + x_1 + x_2$$

$$(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_2x_3$$

$$(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)(1 + x_4)$$
$$= 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$$
$$+ x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$$

Se, no fim, todos os x que tem um índice, são substituídos por um x simples, os produtos que tem quantidades iguais de fatores tornam idênticos e isso transforma os números das combinações nos coeficientes dos membros nas diversas potencias de x.

A teoria das combinações permite-nos, por fim, resolver por cálculos o problema que tinha resultado do quadrado mágico da pag. 15. A pergunta que tinha surgido era a de saber quais os grupos de 4 numeradores tirados da seqüencia dos números de 1 a 16 que tem por soma 34. Se partirmos – de maneira análoga a como temos feito no caso das permutações e das combinações – daquelas combinações de 4 números tendo soma 34, nas primeiras posições os números menores, fazendo seguir depois de maiores, a primeira que se oferece é 1 + 2 + 15 + 16, com efeito, determinados os dois números menores, ainda faltam 31 para se chegar ao total de 34. Não havendo números superiores a 16, os dois mais elevados disponíveis, ou seja, 15 e 16, devem ser aproveitados para se chegar ao total de 31. Para os números pequenos que vem em segundo lugar, 1 e 3, precisamos ainda de 30 para perfazer os 34. Como 15 + 15 está excluído (já que o 15 só existe uma vez), resta recorrer a 14 + 16, o que dá: 1 + 3 + 14 + 16 = 34. Para os números pequenos que se seguem, 1 e 4 , temos duas soluções: 1 + 4 + 13 + 16 e 1 + 4 + 14 + 15, obtemos desta forma o seguinte quadro:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 15 | 16 | 231316 | 341116 | 45 | 916 | 56 | 716 | 67 | 813 |
| | | | | 231415 | 341215 | 45 | 1015 | 56 | 815 | 57 | 912 |
| 1 | 3 | 14 | 16 | | 341314 | 45 | 1114 | 56 | 914 | 671011 | |
| | | | | 241215 | | 45 | 1213 | 56 | 1013 | 68 | 911 |
| 1 | 4 | 1316 | | 241315 | 351016 | | | 56 | 1112 | 78 | 910 |
| 1 | 4 | 1415 | | | 351115 | 46 | 816 | | | | |
| | | | | 251116 | 351214 | 46 | 915 | 57 | 814 | | |
| 1 | 5 | 1216 | | 251215 | | 46 | 1014 | 57 | 913 | | |
| 1 | 5 | 1315 | | 251314 | 36 916 | 46 | 1113 | 57 | 1012 | | |
| | | | | | 361015 | | | | 1011 | | |
| 1 | 6 | 1116 | | 261016 | 361114 | 47 | 815 | 58 | | | |
| 1 | 6 | 1215 | | 261115 | 361213 | 47 | 914 | 58 | | | |
| 1 | 6 | 1314 | | 261214 | | 47 | 1013 | | | | |
| | | | | | 37 816 | 47 | 1112 | | | | |
| 1 | 7 | 1016 | | 27 916 | 37 915 | | | | | | |
| 1 | 7 | 1115 | | 271015 | 371014 | 48 | 913 | | | | |
| 1 | 7 | 1214 | | 271114 | 371113 | 48 | 1012 | | | | |
| | | | | 271213 | | | | | | | |
| 1 | 8 | 916 | | | 38 914 | 49 | 1011 | | | | |
| 1 | 8 | 1015 | | 28 915 | 381013 | | | | | | |
| 1 | 8 | 1114 | | 281014 | 381112 | | | | | | |
| 1 | 8 | 1213 | | 281113 | | | | | | | |
| | | | | | 391012 | | | | | | |
| 1 | 9 | 1014 | | 291013 | | | | | | | |
| 1 | 9 | 1113 | | 291112 | | | | | | | |
| 1 | 10 | 1112 | | | | | | | | | |

Total = $19 + 19 + 18 + 15 + 10 + 5 = 86$ possibilidades *

*Confira as páginas 24 e seguintes deste livro.

# Índice


- Prefácio ..... 03
- Introdução ..... 04
- Contar ..... 07
- A contagem e a sequência das tabuadas ..... 10
- Introdução das 4 operações ..... 17
- O treino das operações com números puros ..... 21
- As operações com objetos concretos ..... 32
- As operações armadas ..... 35
- Sobre as operações armadas ..... 52
- Frações ..... 62
- Frações decimais ..... 79
- Algumas observações a respeito da introdução da álgebra ..... 86
- Problemas práticos ..... 95
- A transição para o segundo ciclo ..... 100